# Ejercicio transformadores pu

14/11/2010

Este ejercicio se va a resolver utilizando la normalización de los transformadores (método p.u.) Os propongo que también lo resolváis utilizando el método tradicional para comprobar que los resultados son correctos

## 1. Ejercicio transformadores pu

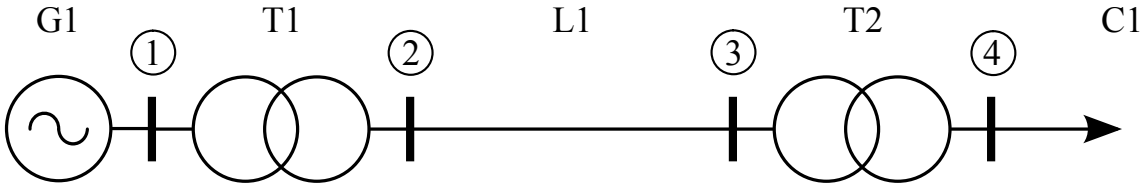


Figura 1: Sistema eléctrico que suministra energía a una carga

### 1.1. Datos del problema

Dada la red trifásica compuesta por:

- Fuente de tensión trifásica ideal **G1**: V = 11kV
- Transformador trifásico **T1**: Xcc = 0.15 Ohmios rt = 11/132kV
- Línea **L1**: Rl = 20 Ohmios Xl = 30 Ohmios
- Transformador trifásico **T2**: Xcc = 10 Ohmios rt = 132/66kV
- Carga trifásica **C1**:
  - P = 80 MW
  - Q = 10 MVar

Calcular:

1. Tensiones en todos los nudos del sistema.
2. Intensidades en cada uno de los elementos del sistema
3. ¿Cual sería la regulación de **T2** para que la tensión en la carga, nudo 4, sea la tensión nominal?

Nota: Utilizar como Sbase = 100 MVA.

### 1.2. Bases del problema

El primer paso para resolver un problema por p.u es la elección de las bases. Tal y como se explicó en clase, la elección de las bases es bastante directa si es que queremos que los transformadores sin regular se comporten como elementos simples.

En principio tendremos tantas bases como niveles de tensión diferentes haya. Las tensiones bases se corresponderán con las tensiones nominales y las potencias bases serán las mismas para todas ellas.

Bases:

Base de 11kV:

```
Sb1 = 100e6
Vb1 = 11e3
Zb1 = Vb1^2/Sb1
Ib1 = Sb1/(sqrt(3)*Vb1)
```

```
 Sb1 =  100000000
 Vb1 =  11000
 Zb1 =  1.2100
 Ib1 =  5248.6
```

Base de 132e3

```
Sb2 = Sb1
Vb2 = 132e3
Zb2 = Vb2^2/Sb2
Ib2 = Sb2/(sqrt(3)*Vb2)
```

```
 Sb2 =  100000000
 Vb2 =  132000
 Zb2 =  174.24
 Ib2 =  437.39
```

Y la base de 66kV

```
Sb3 = Sb1
Vb3 = 66e3
Zb3 = Vb3^2/Sb3
Ib3 = Sb3/(sqrt(3)*Vb3)
```

```
 Sb3 =  100000000
 Vb3 =  66000
 Zb3 =  43.560
 Ib3 =  874.77
```

Tabla 1: Bases del sistema

| Bases | Vb(kV) | Sb(MVA) | Zb(Ohm) | Ib(A) |
|---|---|---|---|---|
| Base 11kV | 11 | 100 | 1.21 | 5248.6388 |
| Base 132kV | 132 | 100 | 174.24 | 437.38657 |
| Base 66kV | 66 | 100 | 43.56 | 874.77314 |

---

## 1.3. Paso a pu

Para cada elemento del sistema el paso a por unidad consiste en dividir los datos directamente por la base del nivel de tensión en donde este esté situado.

Paso a pu:

```
VG1_pu = 11e3/Vb1
Xcc_T1_pu = 0.15/Zb1
R_L1_pu = 20/Zb2
X_L1_pu = 30/Zb2
Xcc_T2_pu = 10/Zb2
P_C1_pu = 80e6/Sb3
Q_C1_pu = 10e6/Sb3
S_C1_pu = P_C1_pu+j*Q_C1_pu
```

```
 VG1_pu =  1
 Xcc_T1_pu =  0.12397
 R_L1_pu =  0.11478
 X_L1_pu =  0.17218
```

```
Xcc_T2_pu =  0.057392
P_C1_pu =  0.80000
Q_C1_pu =  0.10000
S_C1_pu =  0.80000 + 0.10000i
```

Por lo tanto las impedancias de los distintos elementos será:

```
Zcc_T1_pu = j*Xcc_T1_pu
Z_L1_pu = R_L1_pu+j*X_L1_pu
Zcc_T2_pu = j*Xcc_T2_pu
```

```
Zcc_T1_pu =  0.00000 + 0.12397i
Z_L1_pu =  0.11478 + 0.17218i
Zcc_T2_pu =  0.000000 + 0.057392i
```

Tabla 2: Datos en magnitudes y sus correspondientes valores en pu

| | V(kV) | V(pu) | P(MW) | P(pu) | Q(MVar) | Q(pu) | R(Ohm) | R(pu) | X(Ohm) | X(pu) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| G1 | 11 | 1 | - | - | - | - | - | - | - | - |
| T1 | - | - | - | - | - | - | - | - | 0.15 | 0.124 |
| L1 | - | - | - | - | - | - | 20 | 0.115 | 30 | 0.172 |
| T2 | - | - | - | - | - | - | - | - | 10 | 0.057 |
| C1 | - | - | 80 | 0.8 | 10 | 0.1 | - | - | - | |

## 1.4. Resolviendo el circuito normalizado

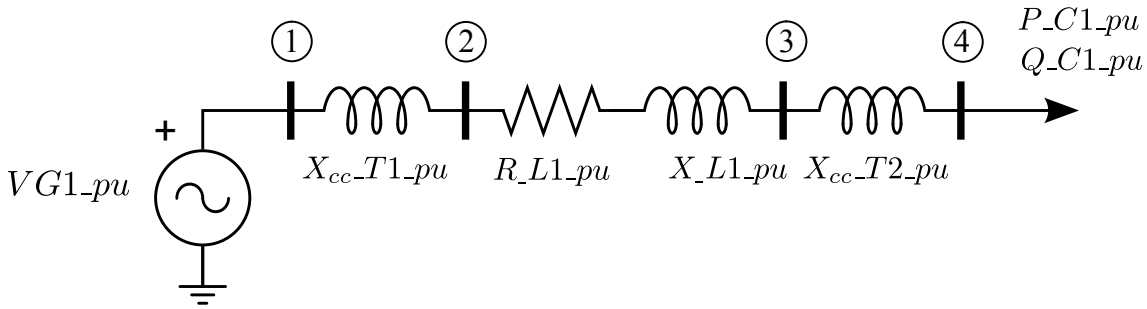


Figura 2: Sistema eléctrico en pu

El circuito normalizado es bastante sencillo de resolver puesto que las reactancias de los distintos elementos están todos en serie. Puesto que nos dan como dato la potencia consumida por la carga C1, si somos capaces de calcular la tensión en módulo en bornes de la carga podremos calcular la intensidad y a partir de ahí las tensiones en todos los nudos.

Para resolver este circuito se van a proponer tres soluciones diferentes.

### 1.4.1. Primera solución

Para resolver este circuito se puede sustituir el consumo de la carga C1 por una impedancia equivalente a una tensión dada, pero como no conocemos la tensión real deberíamos suponer una tensión inicial, calcular a partir de ella la impedancia equivalente, posteriormente recalcular la tensión e iterar hasta que converja. Esta va a ser la primera propuesta de solución, aunque primero vamos a calcular el equivalente serie de todos los elementos para simplificar las cuentas:

```
Zeq = Zcc_T1_pu+Z_L1_pu+Zcc_T2_pu
Req = real(Zeq)
Xeq = imag(Zeq)
```

```
Zeq =  0.11478 + 0.35354i
Req =  0.11478
Xeq =  0.35354
```

Empezaremos suponiendo que la tensión en el nudo 4, V4_pu, es igual a 1 en módulo y, a continuación, calculamos la Zcarga equivalente tal que a dicha tensión tiene el mismo consuma de potencia activa y reactiva de la carga C1

```
V4_pu = 1
Zcarga = abs(V4_pu)^2/conj(P_C1_pu+j*Q_C1_pu)
I = VG1_pu/(Zeq+Zcarga)

 V4_pu =  1
 Zcarga =  1.23077 + 0.15385i
 I =  0.65067 - 0.24535i
```

Con esta intensidad calcularemos que tensión hubiéramos tenido en el nudo 4

```
V4_pu = Zcarga/(Zcarga+Zeq)*VG1_pu
V4_pu = Zcarga*I
abs(V4_pu)

 V4_pu =  0.83857 - 0.20187i
 V4_pu =  0.83857 - 0.20187i
 ans =  0.86253
```

Y, con esta tensión vuelvo a empezar el proceso: Cálculo de la Zcarga =>Cálculo de I =>Cálculo de $V4_{pu}$. El proceso termina cuando la diferencia entre los valores de $V4_{pu}$ de dos iteraciones consecutivas es menor que un valor dado. Normalmente, en esta asignatura sólo será necesario realizar una iteración pero para este problema vamos a realizar varias iteraciones para comprobar que, si los valores iniciales son adecuados y la red también, el problema converge a la solución aunque lentamente. Por lo tanto vamos a seguir con el proceso iterativo:

Iteración 2:

```
Zcarga = abs(V4_pu)^2/conj(P_C1_pu+j*Q_C1_pu)
I = VG1_pu/(Zeq+Zcarga)
V4_pu = Zcarga/(Zcarga+Zeq)*VG1_pu
abs(V4_pu)

 Zcarga =  0.91564 + 0.11445i
 I =  0.80452 - 0.36539i
 V4_pu =  0.77847 - 0.24249i
 ans =  0.81537
```

Iteración 3:

```
Zcarga = abs(V4_pu)^2/conj(P_C1_pu+j*Q_C1_pu)
I = VG1_pu/(Zeq+Zcarga)
V4_pu = Zcarga/(Zcarga+Zeq)*VG1_pu
abs(V4_pu)

 Zcarga =  0.81824 + 0.10228i
 I =  0.86527 - 0.42272i
 V4_pu =  0.75124 - 0.25738i
 ans =  0.79410
```

Iteración 4:

```
Zcarga = abs(V4_pu)^2/conj(P_C1_pu+j*Q_C1_pu)
I = VG1_pu/(Zeq+Zcarga)
V4_pu = Zcarga/(Zcarga+Zeq)*VG1_pu
abs(V4_pu)

 Zcarga =  0.776124 + 0.097016i
 I =  0.89385 - 0.45204i
 V4_pu =  0.73759 - 0.26412i
 ans =  0.78345
```

Iteración 5:

```
Zcarga = abs(V4_pu)^2/conj(P_C1_pu+j*Q_C1_pu)
I = VG1_pu/(Zeq+Zcarga)
V4_pu = Zcarga/(Zcarga+Zeq)*VG1_pu
abs(V4_pu)

 Zcarga =  0.755444 + 0.094430i
 I =  0.90841 - 0.46762i
 V4_pu =  0.73041 - 0.26748i
 ans =  0.77784
```

Iteración 6:

```
Zcarga = abs(V4_pu)^2/conj(P_C1_pu+j*Q_C1_pu)
I = VG1_pu/(Zeq+Zcarga)
V4_pu = Zcarga/(Zcarga+Zeq)*VG1_pu
abs(V4_pu)

 Zcarga =  0.744667 + 0.093083i
 I =  0.91614 - 0.47608i
 V4_pu =  0.72653 - 0.26924i
 ans =  0.77482
```

Iteración 7:

```
Zcarga = abs(V4_pu)^2/conj(P_C1_pu+j*Q_C1_pu)
I = VG1_pu/(Zeq+Zcarga)
V4_pu = Zcarga/(Zcarga+Zeq)*VG1_pu
abs(V4_pu)

 Zcarga =  0.738880 + 0.092360i
 I =  0.92033 - 0.48072i
 V4_pu =  0.72441 - 0.27019i
 ans =  0.77316
```

Iteración 8 y última:

```
Zcarga = abs(V4_pu)^2/conj(P_C1_pu+j*Q_C1_pu)
I = VG1_pu/(Zeq+Zcarga)
V4_pu = Zcarga/(Zcarga+Zeq)*VG1_pu
abs(V4_pu)

 Zcarga =  0.735721 + 0.091965i
 I =  0.92263 - 0.48328i
 V4_pu =  0.72324 - 0.27071i
 ans =  0.77224
```

La solución final es $V4_{pu} = 0.77111$ tal y como obtendremos en la segunda forma de resolver este ejercicio.

### 1.4.2. Segunda solución

Otra forma de resolver esto sería utilizando cuadripolos e igualando el valor absoluto de la tensión a la entrada (VG1_pu = V1_pu) con el producto de A*V4_pu+B*I4_pu, siendo A y B los parámetros de transmisión correspondientes a la matriz de transmisión entre los nudos 1 y 4 =>abs(V1_pu) = abs(A*V4_pu+B*I4_pu). Si escogemos, por conveniencia, el origen de fases en V4_pu, sustituimos I4_pu en función de S_C1_pu y de V4_pu (I4_pu = conj(S_C1_pu)/conj(V4_pu) = conj(S_C1_pu)/V4_pu, al escoger como origen de fases V4_pu), agrupamos partes reales e imaginarias y elevamos al cuadrado se obtiene el siguiente polinomio de cuarto grado:

$$V4_{pu}^4 \cdot A^2 + V4_{pu}^2 \cdot [2 \cdot A \cdot B \cdot S_C1_{pu} \cdot \cos(\varphi_A - \varphi_B + \varphi_{SC1_{pu}}) - V1_pu^2] + [B^2 \cdot S_C1_{pu}^2] = 0,$$

donde V4_pu, A, B, S_C1_pu son los módulos de dichos valores y $\varphi_A$, $\varphi_B$, $\varphi_{SC1_{pu}}$ sus fases respectivamente.

Por lo tanto, calculamos los distintos valores según los datos y el circuito de este ejercicio y resolvemos el polinomio de cuarto grado con la función roots de octave:

```
V1_pu = VG1_pu
A = 1
B = Zeq
coef_4 = abs(A)^2
coef_3 = 0
coef_2 = 2*abs(A)*abs(B)*abs(S_C1_pu)*cos(angle(A)-angle(B)+angle(S_C1_pu))-abs(V1_pu)^2
coef_1 = 0
coef_0 = abs(B)^2*abs(S_C1_pu)^2
raices = roots([coef_4 coef_3 coef_2 coef_1 coef_0])
```

```
V1_pu =  1
A =  1
B =  0.11478 + 0.35354i
coef_4 =  1
coef_3 = 0
coef_2 = -0.74564
coef_1 = 0
coef_0 =  0.089806
raices =

  -0.77111
  -0.38863
   0.77111
   0.38863
```

La solución correcta es aquella positiva mas cercana a 1. Por lo tanto el módulo de la tensión en el nudo 4 es V4_pu = 0.77111, tal y como habíamos dicho en el apartado anterior.

### 1.4.3. Tercera solución

Esta solución hará uso de la expresión de la caída de tensión exacta entre dos nudos de una línea inductiva. Realmente se podría decir que el método es idéntico al realizado en la segunda solución pero con la diferencia de que utilizaremos la expresión de la caída de tensión exacta en vez de utilizar cuadripolos.

Concretamente, conocemos la tensión en módulo del nudo 1, entre los nudos 1 y 4 tenemos una Zeq y en su extremo tenemos un consumo de potencia por lo podemos utilizar dicha fórmula para obtener el módulo de la tensión en la carga y a partir de ella la intensidad, ahorrándonos tener que realizar el proceso iterativo.

Dicha fórmula será, utilizando las variables que se han definido a lo largo del problema:

$$V1_{pu} - V4_{pu} = R_{eq} \cdot \frac{P_C1_{pu}}{V4_{pu}} + X_{eq} \cdot \frac{Q_C1_{pu}}{V4_{pu}} + V1_{pu} - \sqrt{V1_{pu}^2 - \left(X_{eq} \cdot \frac{P_C1}{V4_{pu}} - Req \cdot \frac{Q_C1_{pu}}{V4_{pu}}\right)^2}$$

Operando,

$$V1_{pu} \cdot V4_{pu} - V4_{pu}^2 = R_{eq} \cdot P_C1_{pu} + X_{eq} \cdot Q_C1_{pu} + V1_{pu} \cdot V4_{pu} - \sqrt{V1_{pu}^2 \cdot V4_{pu}^2 - (X_{eq} \cdot P_C1_{pu} - R_{eq} \cdot Q_C1_{pu})^2}$$

y reordenando para elevar al cuadrado

$$V4_{pu}^2 + (R_{eq} \cdot P_C1_{pu} + X_{eq} \cdot Q_C1_{pu}) = \sqrt{V1_{pu}^2 \cdot V4_{pu}^2 - (X_{eq} \cdot P_C1_{pu} - R_{eq} \cdot Q_C1_{pu})^2}$$

a continuación elevamos al cuadrado y reorganizamos términos para llegar al siguiente polinomio de cuarto orden de $V4_{pu}$:

$$V4_{pu}^4 + V4_{pu}^2 \cdot [2 \cdot (R_{eq} \cdot P_C1_{pu} + X_{eq} \cdot Q_C1_{pu}) - V1_{pu}^2] + [(R_{eq}^2 + X_{eq}^2) \cdot (P_C1_{pu}^2 + Q_C1_{pu}^2)] = 0$$

Yo juraría que este polinomio es primo-hermano del que hemos obtenido en la solución dos, tal y como se puede comprobar observando el valor numérico de los coeficientes en cada caso. Para resolver esta ecuación vamos a utilizar la función roots de octave que permite obtener los ceros de un polinomio. La utilización de esta función exige que le introduzcamos como parámetro a la función un vector que contiene las potencias decrecientes del polinomio del que queremos hallar los ceros y eso es lo que hacemos en la llamada a roots a continuación.

```
coef_4 = 1
coef_3 = 0
coef_2 = (2*(Req*P_C1_pu+Xeq*Q_C1_pu)-VG1_pu^2)
coef_1 = 0
coef_0 = ((Req^2+Xeq^2)*(P_C1_pu^2+Q_C1_pu^2))
raices = roots([coef_4 coef_3 coef_2 coef_1 coef_0])

coef_4 =  1
coef_3 = 0
coef_2 = -0.74564
coef_1 = 0
coef_0 =  0.089806
raices =

  -0.77111
  -0.38863
   0.77111
   0.38863
```

La solución de dicha ecuación es la raíz positiva mas próxima a 1 y tomando origen de fases en el nudo de la carga la intensidad absorbida por dicha carga será entonces:

```
VC1_pu = raices(3)
I_C1_pu = conj(P_C1_pu+j*Q_C1_pu)/conj(VC1_pu)

 VC1_pu =  0.77111
 I_C1_pu =  1.03747 - 0.12968i
```

Y así comprobamos que la tensión coincide con la obtenida en la solución anterior y obtenemos finalmente la intensidad.

### 1.4.4. Cálculo de la intensidad resto elementos

Puesto que todos los elementos están en serie la intensidad en pu será la misma para todos los elementos de este sistema con lo que no hay que hacer nada mas

### 1.4.5. Cálculo de la tensión resto elementos

El cálculo de las tensiones se pueden realizar de distintas formas como, por ejemplo, la siguiente y que consiste en que como ya conocemos la tensión en la carga y la potencia consumida entonces podemos obtener la impedancia equivalente de la carga tal que a dicha tensión tendría ese consumo de potencia y, finalmente, como todos los elementos del circuito están en serie utilizaremos el concepto de divisor de tensión.

Por lo tanto vamos a calcular la impedancia equivalente de la carga:

```
Z_carga_pu = VC1_pu^2/conj(S_C1_pu)

 Z_carga_pu =  0.731820 + 0.091477i
```

y, a continuación, el resto de tensiones sale utilizando el divisor de tensión:

```
Z_total_pu = Zcc_T1_pu+Z_L1_pu+Zcc_T2_pu+Z_carga_pu
V2_pu = (Z_L1_pu+Zcc_T2_pu+Z_carga_pu)/Z_total_pu*VG1_pu
V3_pu = (Zcc_T2_pu+Z_carga_pu)/Z_total_pu*VG1_pu
V4_pu = Z_carga_pu/Z_total_pu*VG1_pu
V4_pu_sin_regular = V4_pu

 Z_total_pu =  0.84660 + 0.44501i
 V2_pu =  0.93969 - 0.11473i
 V3_pu =  0.74970 - 0.21823i
 V4_pu =  0.72178 - 0.27135i
 V4_pu_sin_regular =  0.72178 - 0.27135i
```

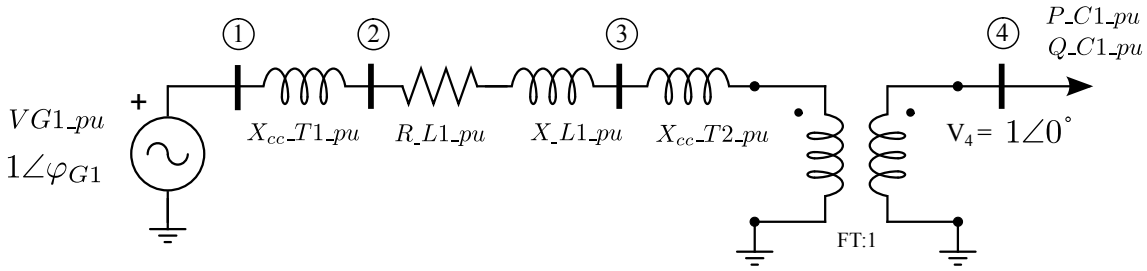


Figura 3: Sistema eléctrico con el transformador trabajando en una toma diferente de la nominal

### 1.4.6. Regulación de T2 para que $V4_{pu}$ sea 1pu

Una forma aproximada para obtener este resultado, que no tiene en cuenta el posible cambio en el régimen de intensidades por el cambio de toma del transformador y por tanto la modificación de las tensiones en los nudos de sistema, sería suponer que no hay cambio en las intensidades del sistema debido al cambio de toma del transformador bajo regulación. Bajo esta hipótesis, si pensamos que la tensión en el primario del transformador ideal con relación FT es la tensión que hemos calculado para el nudo 4 anterior y que la tensión del secundario de este mismo transformador debe ser la tensión que queremos que haya, se obtiene FT directamente como el cociente de ambas tensiones:

```
FT_aprox = abs(V4_pu)/1
reg = (FT_aprox-1)*100

 FT_aprox =  0.77111
 reg = -22.889
```

Un valor mas exacto, pero a la vez mas largo de aplicar, sería tener en cuenta la influencia que el cambio del FT tendría sobre la intensidad y, por tanto, sobre las tensiones de los nudos. Para ello se utilizarán cuadripolos para su realización y para ello, lo mas cómodo, sería calcular la tensión y la intensidad en el primario en función del FT y luego resolver la ecuación de tensiones que se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \bar{V}G1_{pu} \\ \bar{I}G1_{pu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} FT \cdot \bar{V}4_{pu} \\ \frac{1}{FT}\bar{I}4_{pu} \end{bmatrix}$$

Donde A, B, C, D, $V4_{pu}$ (volvemos a tomarlo como origen de fases) y $I4_{pu}$ son ahora:

```
A = 1
B = Zcc_T1_pu+Z_L1_pu+Zcc_T2_pu
C = 0
D = 1
V4_pu = 1
I4_pu = conj(S_C1_pu/V4_pu)

 A =  1
 B =  0.11478 + 0.35354i
 C = 0
 D =  1
 V4_pu =  1
 I4_pu =  0.80000 - 0.10000i
```

Y entonces podemos escribir:

$$\bar{V}G1_{pu} = \bar{V}1_{pu} = \bar{A} \cdot FT \cdot \bar{V}4_{pu} + \bar{B}/FT \cdot \bar{I}4_{pu}$$

Tomando valores absolutos en ambos miembros, la resolución de esta ecuación nos lleva a la siguiente ecuación de cuarto grado

$$FT^4 \cdot (\text{real}(\bar{A} \cdot \bar{V}4_{pu}))^2 + FT^2 \cdot [2 \cdot \text{real}(\bar{A} \cdot \bar{V}4_{pu}) \cdot \text{real}(\bar{B} \cdot \bar{I}4_{pu}) - V1_{pu}^2] +$$

$$+[B^2 \cdot I4_{pu}^2 + 2 \cdot \text{imag}(\bar{A} \cdot \bar{V}4_{pu}) \cdot \text{imag}(\bar{B} \cdot \bar{I}4_{pu}) + (\text{imag}(\bar{A} \cdot \bar{V}4_{pu}))^2] = 0$$

Cuya resolución nos da las siguientes raices:

```
coef_4 = (real(A*V4_pu))^2
coef_3 = 0
coef_2 = (2*real(A*V4_pu)*real(B*I4_pu)-abs(V1_pu)^2)
coef_1 = 0
coef_0 = (abs(B)*abs(I4_pu))^2+2*imag(A*V4_pu)*imag(B*I4_pu)+(imag(A*V4_pu))^2
raices = roots([coef_4 coef_3 coef_2 coef_1 coef_0])
```

```
coef_4 =  1
coef_3 = 0
coef_2 = -0.74564
coef_1 = 0
coef_0 =  0.089806
raices =

  -0.77111
  -0.38863
   0.77111
   0.38863
```

Cuya solución es la misma de antes: FT = 0.77111. El tema es que ambas soluciones no se diferencian con lo que la pregunta aquí sería: ¿Por qué obtengo la misma solución?

## 1.5. Deshaciendo la normalización

Hay que deshacer el pu utilizando las bases adecuadas. Para obtener las intensidades:

```
I_C1 = I_C1_pu*Ib3
I_L1 = I_C1_pu*Ib2
I_G1 = I_C1_pu*Ib1
mod_I_C1 = abs(I_C1)
mod_I_L1 = abs(I_L1)
mod_I_G1 = abs(I_G1)
```

```
 I_C1 =  907.55 - 113.44i
 I_L1 =  453.776 -  56.722i
 I_G1 =  5445.31 -  680.66i
 mod_I_C1 =  914.62
 mod_I_L1 =  457.31
 mod_I_G1 =  5487.7
```

Y, para las tensiones de línea:

```
V2 = V2_pu*Vb2
V3 = V3_pu*Vb2
V4 = V4_pu_sin_regular*Vb3
mod_V2 = abs(V2)
mod_V3 = abs(V3)
mod_V4 = abs(V4)
fase_V2 = angle(V2)*180/pi
fase_V3 = angle(V3)*180/pi
fase_V4 = angle(V4)*180/pi
```

```
 V2 = 1.2404e+05 - 1.5144e+04i
 V3 = 9.8961e+04 - 2.8807e+04i
 V4 = 4.7638e+04 - 1.7909e+04i
 mod_V2 =  1.2496e+05
 mod_V3 =  1.0307e+05
 mod_V4 =  5.0893e+04
 fase_V2 = -6.9609
 fase_V3 = -16.230
 fase_V4 = -20.603
```

Observar que al multiplicar las tensiones obtenidas por la Vbase de línea correspondiente ya obtenemos directamente las tensiones de línea. En cambio la fase obtenida se corresponde con la fase de la tensión de fase (un poco lioso no?).