Modelización de la línea por cuadripolos

Juan Alvaro Fuentes Moreno
juanalvaro.fuentes@upct.es

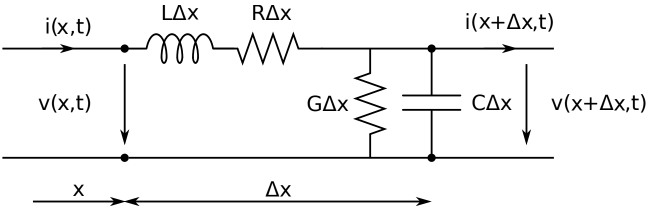
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad Politécnica de Cartagena

enero 2012

Índice

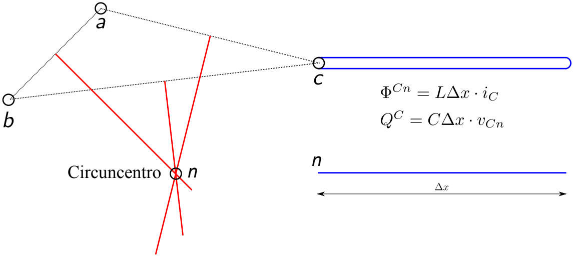
Introducción

- Interesa relacionar tensiones e intensidades del origen con las del destino
- En temas anteriores se han estudiado los parámetros R, L, G y C
- Puesto que la línea es complicada de modelar se suelen hacer simplificaciones
  - Modelo de la línea de parámetros distribuidos
    - Se supone que el estado de operación de la línea es equilibrado
    - Además los parámetros se distribuyen uniformemente a lo largo de la línea
    - Un poco de historia:
      - En 1855 William Thomson (Lord Kelvin) inició el estudio de la línea eléctrica ante la pregunta de si sería factible una línea telegráfica entre Europa-EEUU
      - En 1885 Oliver Heaviside lo completó
- Primero vamos a ver la obtención física del circuito equivalente de un elemento de la línea de longitud Δx



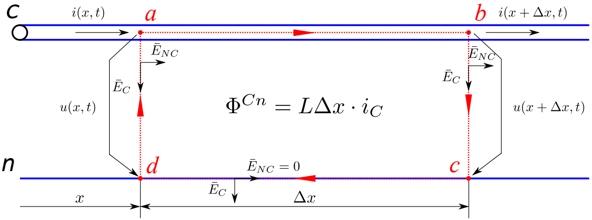
Modelo físico de un elemento de línea

- En temas anteriores hemos visto como calcular el flujo en la superficie que hay entre un conductor y el neutro y la carga en la superficie del conductor
  - Inductancia aparente $\Rightarrow \Phi = LI$
  - Capacidad aparente $\Rightarrow Q = CV$



- ¿Como se llega al circuito equivalente partiendo del modelo físico? $\Rightarrow$ Leyes de Kirchhoff
  - Cálculo del trabajo a lo largo de una curva cerrada
  - Principio de conservación de las cargas en un volumen

Modelo físico de un elemento de línea: cálculo del trabajo



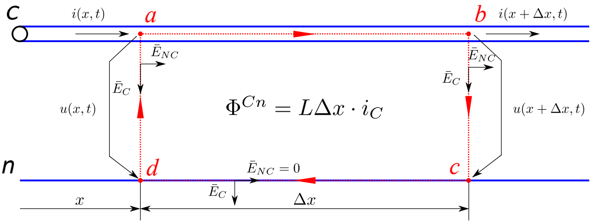
$$\bar{E}_T = \bar{E}_C + \bar{E}_{NC}$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\int_{abcd} \bar{E}_T \cdot d\bar{l}}_{\boxed{1}} = \underbrace{\int_{abcd} \bar{E}_C \cdot d\bar{l}}_{\boxed{2}} + \underbrace{\int_{abcd} \bar{E}_{NC} \cdot d\bar{l}}_{\boxed{3}}$$

$\boxed{1}$ $\int_{abcd} \bar{E}_T \cdot d\bar{l}$

- Ley de Ohm: $\bar{J} = \sigma \bar{E}_T \Rightarrow \bar{E}_T = \frac{\bar{J}}{\sigma}$
- $\int_{ab} \bar{E}_T \cdot d\bar{l} = \int_{ab} \frac{\bar{J}}{\sigma} \cdot d\bar{l} = \int_{ab} \frac{i(x,t)}{S_{conductor}\sigma} dl = i(x,t) \frac{long_{ab}}{S_{conductor}\sigma} = R\Delta x \cdot i(x,t)$
- $\int_{bc} \bar{E}_T \cdot d\bar{l} = \int_{bc} \bar{E}_C + \bar{E}_{NC} \cdot d\bar{l} = \int_{bc} \bar{E}_C + \int_{bc} \bar{E}_{NC} \cdot d\bar{l} = \int_{bc} -\bar{\nabla} V \cdot d\bar{l} = u(x+\Delta x, t)$
- $\int_{cd} \bar{E}_T \cdot d\bar{l} = 0$ puesto que $\bar{E}_{NC} = 0$ y $\bar{E}_C$ es normal
- $\int_{da} \bar{E}_T \cdot d\bar{l} = \int_{da} -\bar{\nabla} V \cdot d\bar{l} = -u(x,t)$



$$\bar{E}_T = \bar{E}_C + \bar{E}_{NC}$$

$$\Downarrow$$

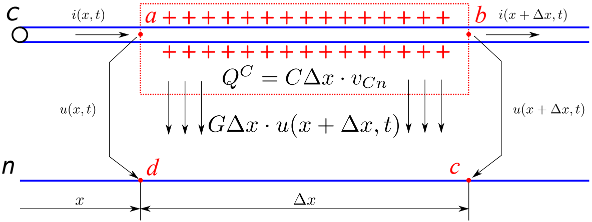
$$\underbrace{\int_{abcd} \bar{E}_T \cdot \bar{dl}}_{\boxed{1}} = \underbrace{\int_{abcd} \bar{E}_C \cdot \bar{dl}}_{\boxed{2}} + \underbrace{\int_{abcd} \bar{E}_{NC} \cdot \bar{dl}}_{\boxed{3}}$$

1. $\int_{abcd} \bar{E}_T \cdot d\bar{l} \Rightarrow R\Delta x \cdot i(x,t) + u(x+\Delta x,t) - u(x,t)$
2. $\int_{abcd} \bar{E}_C \cdot d\bar{l}$, al ser un campo conservativo $\Rightarrow 0$
3. $\int_{abcd} \bar{E}_{NC} \cdot d\bar{l}$, es igual a la $fem_{abcd} \Rightarrow fem_{abcd} = -\frac{d\Phi_{abcd}}{dt} = -L\Delta x \cdot \frac{\partial i(x,t)}{\partial t}$

- Igualando (1 = 2+3): $R\Delta x \cdot i(x,t) + u(x+\Delta x,t) - u(x) = -L\Delta x \cdot \frac{\partial i(x,t)}{\partial t}$
- Y, reordenando términos:

$$u(x+\Delta x,t) - u(x) = -R\Delta x \cdot i(x,t) - L\Delta x \cdot \frac{\partial i(x,t)}{\partial t}$$

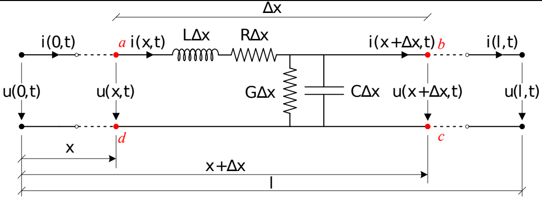
Modelo físico de un elemento de línea: conservación de la carga



Principio de conservacion de la carga

- Principio de conservación de la carga:
  - Suma de cargas que entran igual a la variación de la carga en el volumen
  $$i(x,t)\Delta t - i(x+\Delta x,t)\Delta t - G\Delta x u(x+\Delta x,t)\Delta t = Q(t+\Delta t) - Q(t)$$
  - Dividiendo por Δt y haciendo el límite $\Delta t \to 0$
  $$i(x,t) - i(x+\Delta x,t) - G\Delta x \cdot u(x+\Delta x,t) = \frac{\partial Q}{\partial t}$$
  - Teniendo en cuenta que $Q(t) = C\Delta x \cdot u(x+\Delta x,t)$, reordenando y despreciando infinitésimos de segundo orden:
  $$i(x+\Delta x,t) - i(x,t) = -G\Delta x \cdot u(x,t) - C\Delta x \cdot \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$$

Índice



- La escritura de las leyes de Kirchhoff al elemento de línea Δx permiten obtener las mismas ecuaciones que las del modelo físico $\Rightarrow$ Circuito equivalente

$$u(x+\Delta x,t)-u(x)=-\,R\Delta x\cdot i(x,t)-L\Delta x\cdot\frac{\partial i(x,t)}{\partial t}$$

$$i(x+\Delta x,t)-i(x,t)=-\,G\Delta x\cdot u(x,t)-C\Delta x\cdot\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$$

  - Dividiendo por Δx y haciendo el límite $\Delta x\to 0$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}&=-Ri(x,t)-L\frac{\partial i(x,t)}{\partial t}\\ \frac{\partial i(x,t)}{\partial x}&=-Gu(x,t)-C\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\end{aligned}\tag{1}$$

  - Cuya solución general son las ecuaciones de ondas viajeras en la línea

$$\begin{aligned}u(x,t)&=f(t\pm x/c)\\ i(x,t)&=f(t\pm x/c)\end{aligned}\tag{2}$$

- Puesto que los sistemas eléctricos utilizan tensiones e intensidades senoidales interesa obtener soluciones ante excitaciones senoidales

$$u(x,t) = \mathrm{Re}(\bar{U}e^{jw(t \pm x/\bar{c})}) = \mathrm{Re}(\bar{U}(x)e^{jwt}) \quad (3)$$
$$i(x,t) = \mathrm{Re}(\bar{I}e^{jw(t \pm x/\bar{c})}) = \mathrm{Re}(\bar{I}(x)e^{jwt})$$

- Sustituyendo estas soluciones en (1) obtenemos las ecuaciones en el dominio de la frecuencia

$$\frac{d\bar{U}(x)}{dx} = -(R + jwL)\bar{I}(x) = -\bar{z}\bar{I}(x) \quad (4)$$
$$\frac{d\bar{I}(x)}{dx} = -(G + jwC)\bar{U}(x) = -\bar{y}\bar{U}(x)$$

  - Donde se han introducido las variables $\bar{z} = R + jwL\ (\Omega/m)$ y $\bar{y} = G + jwC\ (S/m)$
- Cuya solución para la dependencia espacial es:

$$\bar{U}(x) = \bar{U}_i e^{-\bar{\gamma}x} + \bar{U}_r e^{+\bar{\gamma}x} \quad (5)$$
$$\bar{I}(x) = \bar{I}_i e^{-\bar{\gamma}x} + \bar{I}_r e^{+\bar{\gamma}x}$$

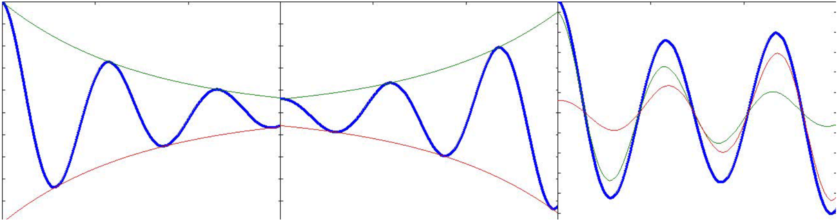
  - Definiendo la *constante de propagación*, $\bar{\gamma}$, como:
  $$\bar{\gamma} \triangleq \sqrt{\bar{z}\bar{y}} = \alpha + j\beta$$
    - A α se le conoce como *cte de atenuacion* y a β como *cte de fase*

Significado de las soluciones: onda incidente y reflejada

- Las soluciones en el tiempo y en el espacio serían:

$$u(x,t) = U_i e^{-\alpha x}\mathrm{Re}[e^{j(wt-\beta x+\phi_{U_i})}] + U_r e^{\alpha x}\mathrm{Re}[e^{j(wt+\beta x+\phi_{U_r})}] \tag{6}$$
$$i(x,t) = I_i e^{-\alpha x}\mathrm{Re}[e^{j(wt-\beta x+\phi_{I_i})}] + I_r e^{\alpha x}\mathrm{Re}[e^{j(wt+\beta x+\phi_{I_r})}]$$

  - Ondas incidente, reflejada y suma de ambas



(a) Incidente (b) Reflejada (c) Incidente+Reflejada

Figura: Ondas propagándose en la línea

- Puesto que son ondas:
  - Longitud de onda, $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$
  - Velocidad de fase, $v = \frac{\omega}{\beta}$

Solución en forma hiperbólica: condiciones de contorno

- Para determinar la solución particular a partir de la general hay que determinar las constantes $\bar{U}_i$, $\bar{U}_r$, $\bar{I}_i$ y $\bar{I}_r$
  - De estas cuatro sólo dos son independientes:
    - $\bar{U}_i = \bar{Z}_c \bar{I}_i$
    - $\bar{U}_r = -\bar{Z}_c \bar{I}_r$
    - Definiendo a la *impedancia característica* como: $\bar{Z}_c \triangleq \sqrt{\frac{\bar{z}}{\bar{y}}}$ (Ω/m)

- Determinar $\bar{U}_i$, $\bar{U}_r$, $\bar{I}_i$ y $\bar{I}_r$ a partir de las condiciones de contorno no es conveniente
  - Las condiciones son dos *fasores* de tensiones e intensidades, a elegir entre origen y destino, y habría que separarlas en parte incidente y reflejada $\Rightarrow$ Inconveniente
  - Es mas conveniente aplicar dichas condiciones sin tener que separarlas en parte incidente y parte reflejada $\Rightarrow$ Solución en forma hiperbólica

$$\begin{aligned}
\bar{U}(x) &= \bar{U}_i e^{-\bar{\gamma}x} + \bar{U}_r e^{+\bar{\gamma}x} \\
&= (\bar{U}_i + \bar{U}_r)\frac{e^{\bar{\gamma}x} + e^{-\bar{\gamma}x}}{2} + (\bar{U}_r - \bar{U}_i)\frac{e^{\bar{\gamma}x} - e^{-\bar{\gamma}x}}{2} \\
&= \bar{K}_1 \cosh(\bar{\gamma}x) + \bar{K}_2 \operatorname{senh}(\bar{\gamma}x)
\end{aligned}$$

- Solución en forma hiperbólica

$$\bar{U}(x) = \bar{K}_1 \cosh(\bar{\gamma}x) + \bar{K}_2 \operatorname{senh}(\bar{\gamma}x) \tag{7}$$

$$\bar{I}(x) = \bar{K}_3 \cosh(\bar{\gamma}x) + \bar{K}_4 \operatorname{senh}(\bar{\gamma}x) \tag{8}$$

Solución en forma hiperbólica: determinación de K_1, K_2, K_3 y K_4

- Determinación de K_1 y K_3
  - En $x = 0$ se cumple $\bar{U}(x) = \bar{U}(0)$ y $\bar{I}(x) = \bar{I}(0) \Rightarrow$

$$\bar{K}_1 = \bar{U}(0)$$
$$\bar{K}_3 = \bar{I}(0)$$

- Determinación de K_2 y K_4
  - Sustituyendo las soluciones hiperbólicas, (7) y (8), en (4):

$$\bar{K}_1\bar{\gamma}\,\mathrm{senh}(\gamma x) + \bar{K}_2\bar{\gamma}\cosh(\gamma x) = -\bar{z}(\bar{K}_3\cosh(\bar{\gamma}x) + \bar{K}_4\,\mathrm{senh}(\bar{\gamma}x))$$
$$\bar{K}_3\bar{\gamma}\,\mathrm{senh}(\gamma x) + \bar{K}_4\bar{\gamma}\cosh(\gamma x) = -\bar{y}(\bar{K}_1\cosh(\bar{\gamma}x) + \bar{K}_2\,\mathrm{senh}(\bar{\gamma}x))$$

  - Estas dos ecuaciones se deben cumplir para todo punto, en especial para $x = 0 \Rightarrow$

$$\bar{K}_2 = -\frac{\bar{z}}{\bar{\gamma}}\bar{K}_3 = -\frac{\bar{z}}{\sqrt{\bar{z}\bar{y}}}\bar{I}(0) = -\bar{Z}_c\bar{I}(0)$$
$$\bar{K}_4 = -\frac{\bar{y}}{\bar{\gamma}}\bar{K}_1 = -\frac{\bar{y}}{\sqrt{\bar{z}\bar{y}}}\bar{U}(0) = -\frac{1}{\bar{Z}_c}\bar{U}(0)$$

    - Donde $\bar{Z}_c = \sqrt{\frac{\bar{z}}{\bar{y}}}$ (Ω/m) es la impedancia característica

- Solución hiperbólica:

$$\bar{U}(x) = \bar{U}(0)\cosh(\bar{\gamma}x) - \bar{Z}_c\bar{I}(0)\,\mathrm{senh}(\bar{\gamma}x)$$
$$\bar{I}(x) = -\frac{\bar{U}(0)}{\bar{Z}_c}\,\mathrm{senh}(\bar{\gamma}x) + \bar{I}(0)\cosh(\bar{\gamma}x)$$

- Solución en forma matricial:

$$\begin{bmatrix}\bar{U}(x)\\ \bar{I}(x)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cosh(\bar{\gamma}x) & -\bar{Z}_c\,\mathrm{senh}(\bar{\gamma}x)\\ -\frac{1}{\bar{Z}_c}\,\mathrm{senh}(\bar{\gamma}x) & \cosh(\bar{\gamma}x)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{U}(0)\\ \bar{I}(0)\end{bmatrix} \tag{9}$$

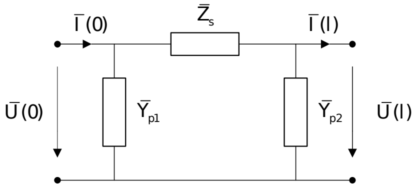
- Parámetros de transmisión de la línea
  - Invirtiendo la solución matricial para $x = l$:

$$\begin{bmatrix}\bar{U}(0)\\ \bar{I}(0)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cosh(\bar{\gamma}l) & +\bar{Z}_c\,\mathrm{senh}(\bar{\gamma}l)\\ \frac{1}{\bar{Z}_c}\,\mathrm{senh}(\bar{\gamma}l) & \cosh(\bar{\gamma}l)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{U}(l)\\ \bar{I}(l)\end{bmatrix} \tag{10}$$

  - Permite obtener los parámetros de transmisión de la línea:

$$\bar{A} = \cosh(\bar{\gamma}l)$$
$$\bar{B} = \bar{Z}_c\,\mathrm{senh}(\bar{\gamma}l)$$
$$\bar{C} = \frac{1}{\bar{Z}_c}\,\mathrm{senh}(\bar{\gamma}l)$$
$$\bar{D} = \cosh(\bar{\gamma}l)$$

- Circuito en pi equivalente



  - Calculando sus parámetros de transmisión

$$\begin{bmatrix}\bar{U}(0)\\ \bar{I}(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \bar{Y}_{p1} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \bar{Z}_s\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ \bar{Y}_{p2} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{U}(l)\\ \bar{I}(l)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+\bar{Y}_{p2}\bar{Z}_s & \bar{Z}_s\\ \bar{Y}_{p1}+\bar{Y}_{p2}+\bar{Y}_{p1}\bar{Y}_{p2}\bar{Z}_s & 1+\bar{Y}_{p1}\bar{Z}_s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{U}(l)\\ \bar{I}(l)\end{bmatrix}$$

  - E igualando con los obtenidos para la línea obtenemos los parámetros del π equivalente que, como se puede ver, es simétrico:

$$\bar{Z}_s=\bar{Z}_c\,\mathrm{senh}(\bar{\gamma}l)$$

$$\bar{Y}_{p2}=\frac{1}{\bar{Z}_c}\frac{\cosh(\bar{\gamma}l)-1}{\mathrm{senh}(\bar{\gamma}l)}=\frac{1}{\bar{Z}_c}\tanh\left(\frac{\bar{\gamma}l}{2}\right)$$

$$\bar{Y}_{p1}=\frac{1}{\bar{Z}_c}\frac{\cosh(\bar{\gamma}l)-1}{\mathrm{senh}(\bar{\gamma}l)}=\frac{1}{\bar{Z}_c}\tanh\left(\frac{\bar{\gamma}l}{2}\right)$$

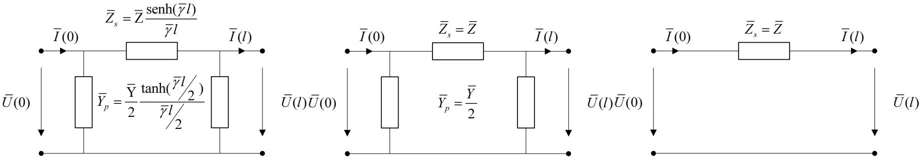
- Transformando las expresiones obtenidas para el π equivalente en:

$$\bar{Z}_s = \bar{Z}_c \operatorname{senh}(\bar{\gamma} l) = \sqrt{\frac{z}{y}} \operatorname{senh}(\bar{\gamma} l) = \bar{z} l \frac{\operatorname{senh}(\bar{\gamma} l)}{\bar{\gamma} l} = \bar{Z} \frac{\operatorname{senh}(\bar{\gamma} l)}{\bar{\gamma} l}$$

$$\bar{Y}_p = \frac{1}{\bar{Z}_c} \tanh\left(\frac{\bar{\gamma} l}{2}\right) = \frac{\bar{y} l}{\bar{\gamma} l} \tanh\left(\frac{\bar{\gamma} l}{2}\right) = \frac{\bar{Y}}{2} \frac{\tanh\left(\frac{\bar{\gamma} l}{2}\right)}{\frac{\bar{\gamma} l}{2}}$$

  - Definiendo $\bar{Z} = \bar{z} \cdot l$ (Ω) y $\bar{Y} = \bar{y} \cdot l/2$ (S)

- Como las funciones $\operatorname{senh}(x)/x$ y $\tanh(x)/x$ tienden ambas a 1 cuando $|x| \ll 1 \Rightarrow$



(a) Línea larga, para todo l (b) Línea media, para $l \leq 250 km$ (c) Línea corta, para $l \leq 80 km$

Figura: Modelos de la línea eléctrica y sus límites (para línea aérea)

Potencia natural de la línea

- Potencia natural $\triangleq$ potencia transportada por la línea cuando es terminada por $\bar{Z}_c$
  - $\bar{U}(l) = \bar{Z}_c \bar{I}(l)$
  - La potencia transportada, la potencia natural, será: $\bar{S}_c = \frac{U(l)^2}{\bar{Z}_c^*}$

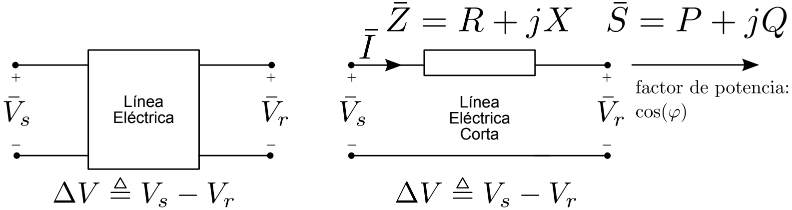
Tensiones	Aéreas $Z_c = 350\Omega$	Subterráneas $Z_c = 40\Omega$
(kV)	(MVA)	(MVA)
20	1,14	10
66	12,4	109
132	49,8	435
220	138	1 200
400	457	4 000

Potencias naturales típicas de líneas aéreas y subterráneas

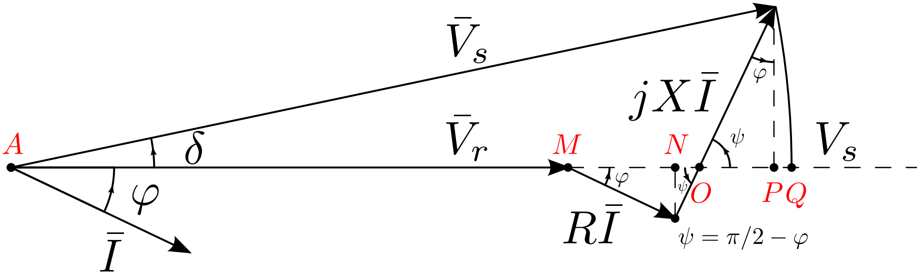
- Para líneas ideales $\bar{Z}_c \in \Re$:
  - Si $Z_{carga} < Z_c \Rightarrow$ la tensión va disminuyendo a lo largo de la línea
  - Si $Z_{carga} = Z_c \Rightarrow$ el perfil de tensiones es plano
  - Si $Z_{carga} > Z_c \Rightarrow$ la tensión va aumentando a lo largo de la línea (efecto ferranti)

Índice

- *Caída de tensión en una línea* $\triangleq$ diferencia entre los módulos de la tensión a la entrada y a la salida



- Para el caso del modelo de línea de longitud corta las caídas de tension son:
  - Expresado con I y φ
    - Exacta: $\Delta V = RI\cos\varphi + XI \operatorname{sen}\varphi + V_s - \sqrt{V_s^2 - (XI\cos\varphi - RI\operatorname{sen}\varphi)^2}$
    - Aproximada: $\Delta V = RI\cos\varphi + XI\operatorname{sen}\varphi$
  - Expresado con P y Q
    - Exacta: $\Delta V = R\frac{P}{V_r} + X\frac{Q}{V_r} + V_s - \sqrt{V_s^2 - (X\frac{P}{V_r} - R\frac{Q}{V_r})^2}$
    - Aproximada: $\Delta V = R\frac{P}{V_r} + X\frac{Q}{V_r}$
  - De tensión de línea: ΔV^{linea}
    - $\Delta V^{linea} = \sqrt{3}\Delta V$
    - Como $\frac{P}{V_r} = \frac{P^{tri}}{\sqrt{3}V_r^{linea}}$ y $\frac{Q}{V_r}\frac{Q^{tri}}{\sqrt{3}V_r^{linea}} \Rightarrow$ Aproximada: $\Delta V^{linea} = R\frac{P^{tri}}{V_r^{linea}} + X\frac{Q^{tri}}{V_r^{linea}}$
  - De circuito monofásico: $\Delta V^{mono} = 2\Delta V$



- $\Delta V = V_s - V_r = \overline{MQ} = \overline{MN} + \overline{NP} + \overline{PQ}$
  - $\overline{MN} = RI\cos\varphi$
  - $\overline{NP} = XI\cos\psi = XI\,\mathrm{sen}\,\varphi$
  - $\overline{PQ} = \overline{AQ} - \overline{AP}$
    - $\overline{AQ} = V_s$
    - $\overline{AP} = \sqrt{V_s^2 - (XI\cos\varphi - RI\cos\psi)^2} = \sqrt{V_s^2 - (XI\cos\varphi - RI\,\mathrm{sen}\,\varphi)^2}$
- Fórmula exacta: $\Delta V = V_s - V_r = \overline{MN} + \overline{NP} + \overline{PQ}$
  - $\Delta V = RI\cos\varphi + XI\,\mathrm{sen}\,\varphi + V_s - \sqrt{V_s^2 - (XI\cos\varphi - RI\,\mathrm{sen}\,\varphi)^2}$
- Fórmula aproximada: $\Delta V = V_s - V_r \approx \overline{MN} + \overline{NP}$
  - $\Delta V = RI\cos\varphi + XI\,\mathrm{sen}\,\varphi$