Cuadripolos

Juan Alvaro Fuentes Moreno
juanalvaro.fuentes@upct.es

Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad Politécnica de Cartagena

enero 2012

Índice

1 Introducción

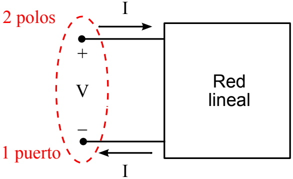
2 Utilización: problemas de transferencia y de transmisión

3 Matrices de admitancias, impedancias y de transmisión

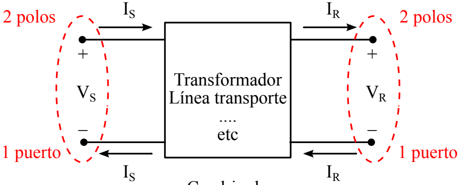
4 Tipos de cuadripolos

5 Cuadripolos en cascada

- Cuadripolos
  - Un *dipolo* es un circuito que presenta dos terminales por donde entra y sale la misma intensidad. A esos dos terminales también se les denomina puerto.
  - Un *cuadripolo* es un circuito que presenta dos puertos, luego tiene cuatro polos.

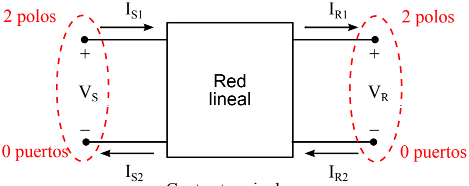


Dipolo

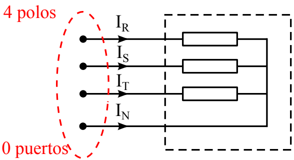


Cuadripolo

- No todos los circuitos que tienen cuatro terminales son cuadripolos. Sólo los que tienen dos puertos
  - Puerto: dos terminales/polos por donde entra y sale la misma intensidad

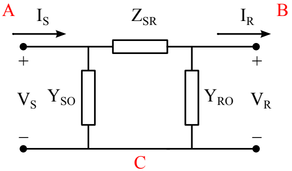


Cuatro terminales

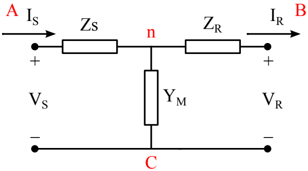


Sistema trifásico
con neutro

- Ejemplos de cuadripolos que nos podemos encontrar
  - Para estos dos casos podríamos convertir de una topología a la otra realizando la conversión $\Delta - Y$ o $Y - \Delta$



Cuadripolo en π



Cuadripolo en T

- $\Delta - Y$

$$Z_A = \frac{Z_{AB}Z_{CA}}{Z_{AB}+Z_{BC}+Z_{CA}}$$
$$Z_B = \frac{Z_{BC}Z_{AB}}{Z_{AB}+Z_{BC}+Z_{CA}}$$
$$Z_C = \frac{Z_{CA}Z_{BC}}{Z_{AB}+Z_{BC}+Z_{CA}}$$

- $Y - \Delta$

$$Y_{AB} = \frac{Y_A Y_B}{Y_A+Y_B+Y_C}$$
$$Y_{BC} = \frac{Y_B Y_C}{Y_A+Y_B+Y_C}$$
$$Y_{CA} = \frac{Y_C Y_A}{Y_A+Y_B+Y_C}$$

Índice

1 Introducción

2 Utilización: problemas de transferencia y de transmisión

3 Matrices de admitancias, impedancias y de transmisión

4 Tipos de cuadripolos

5 Cuadripolos en cascada

- En los sistemas eléctricos los cuadripolos se suelen utilizar para resolver u obtener expresiones de los problemas de transferencia o los de transmisión
  - *Problemas de transferencia*:
    - 1) DATOS: $\overline{V}_S$, $\overline{V}_R$ $\Rightarrow$ INCÓGNITAS: $\bar{I}_S$, $\bar{I}_R$
    - 2) DATOS: $\bar{I}_S$, $\bar{I}_R$ $\Rightarrow$ INCÓGNITAS: $\overline{V}_S$, $\overline{V}_R$
  - *Problemas de transmisión*:
    - 1) DATOS: $\overline{V}_S$, $\bar{I}_S$ $\Rightarrow$ INCÓGNITAS: $\overline{V}_R$, $\bar{I}_R$
    - 2) DATOS: $\overline{V}_R$, $\bar{I}_R$ $\Rightarrow$ INCÓGNITAS: $\overline{V}_S$, $\bar{I}_S$
- Observamos que tenemos dos incógnitas $\Rightarrow$ necesitamos dos ecuaciones que las relacionen
  - Para los problemas de transferencia estas son:
    - *Matriz de admitancias*

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_S \\ -\bar{I}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Y}_{SS} \overline{Y}_{SR} \\ \overline{Y}_{RS} \overline{Y}_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{V}_S \\ \overline{V}_R \end{bmatrix}$$

    - *Matriz de impedancias*

$$\begin{bmatrix} \overline{V}_S \\ \overline{V}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Z}_{SS} \overline{Z}_{SR} \\ \overline{Z}_{RS} \overline{Z}_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_S \\ -\bar{I}_R \end{bmatrix}$$

  - Para el problema de transmisión:
    - *Parámetros de transmisión*

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_S \\ \bar{I}_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A} \bar{B} \\ \bar{C} \bar{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V}_R \\ \bar{I}_R \end{bmatrix}$$

Índice

1 Introducción

2 Utilización: problemas de transferencia y de transmisión

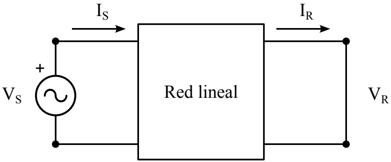
3 Matrices de admitancias, impedancias y de transmisión

4 Tipos de cuadripolos

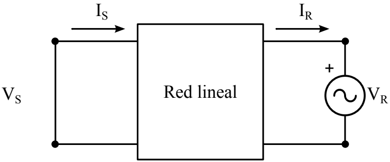
5 Cuadripolos en cascada

Matrices de admitancias, impedancias y de transmisión

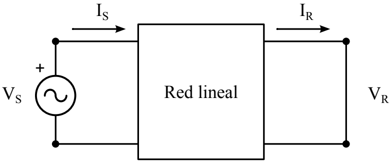
- Los valores de los parámetros pueden ser obtenidos aplicando linealidad
  - Por ejemplo, para la matriz de admitancias (y, análogamente, para las demás)
    - $\overline{Y}_{SS}$, $\overline{Y}_{RR}$ $\Rightarrow$ admitancias del punto de operación
    - $\overline{Y}_{SR}$, $\overline{Y}_{RS}$ $\Rightarrow$ admitancias de transferencia



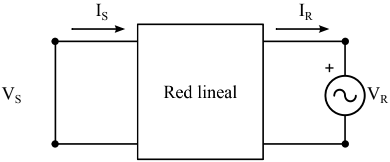
$$\overline{Y}_{SS} = \frac{\overline{I}_S}{\overline{V}_S}\bigg|_{\overline{V}_R=0}$$



$$\overline{Y}_{SR} = \frac{\overline{I}_S}{\overline{V}_R}\bigg|_{\overline{V}_S=0}$$



$$\overline{Y}_{RS} = \frac{-\overline{I}_R}{\overline{V}_S}\bigg|_{\overline{V}_R=0}$$



$$\overline{Y}_{RR} = \frac{-\overline{I}_R}{\overline{V}_R}\bigg|_{\overline{V}_S=0}$$

- Los valores de unos parámetros pueden ser obtenidos en función de otros
  - Puesto que forman un sistema lineal de dos ecuaciones, operando sobre dichas ecuaciones se obtendrán las expresiones con las variables independientes deseadas
  - Por ejemplo, para los parámetros de transmisión (y, análogamente, para las demás)

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_S \\ \bar{I}_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}\bar{B} \\ \bar{C}\bar{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V}_R \\ \bar{I}_R \end{bmatrix}$$

    - Se pueden obtener los parámetros utilizando linealidad: $\overline{A} = \left.\frac{\overline{V}_S}{\overline{V}_R}\right|_{\bar{I}_R=0}$, $\overline{B} = \ldots$
    - O bien obtenerlos a partir de las expresiones en función de otros parámetros, en este caso de los parámetros admitancias

$$\overline{A} = \frac{-\overline{Y}_{RR}}{\overline{Y}_{RS}} \qquad \overline{B} = \frac{-1}{\overline{Y}_{RS}}$$

$$\overline{C} = \overline{Y}_{SR} - \frac{\overline{Y}_{SS}\overline{Y}_{RR}}{\overline{Y}_{RS}} \qquad \overline{D} = -\frac{\overline{Y}_{SS}}{\overline{Y}_{RS}}$$

  - Relaciones entre parámetros
    - Para el caso de *redes pasivas* (sin generación en su interior) se verifica que: $\overline{Y}_{SR} = \overline{Y}_{RS}$
      - Luego se verifica que: $\bar{A}\bar{D} - \bar{B}\bar{C} = 1$ y habrá 1 parámetro independiente menos
    - Para el caso de *redes simétricas* (se puede invertir y no se altera el resto del sistema) se verifica que $\overline{Y}_{RR} = \overline{Y}_{SS}$
      - Luego se verifica que $\bar{A} = \bar{D}$ y habrá 1 parámetro independiente menos

Índice

1 Introducción

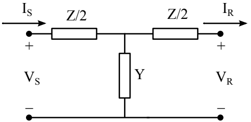
2 Utilización: problemas de transferencia y de transmisión

3 Matrices de admitancias, impedancias y de transmisión

4 Tipos de cuadripolos

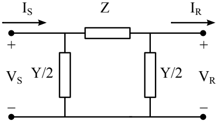
5 Cuadripolos en cascada

- Ejemplos de cuadripolos que nos podemos encontrar



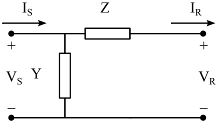
Cuadripolo en T simétrico

$$\overline{A} = 1 + \frac{\bar{Z}\bar{Y}}{2}$$
$$\overline{B} = \bar{Z}(1 + \frac{\bar{Z}\bar{Y}}{4})$$
$$\overline{C} = \bar{Y}$$
$$\overline{D} = 1 + \frac{\bar{Z}\bar{Y}}{2}$$



Cuadripolo en π simétrico

$$\overline{A} = 1 + \frac{\bar{Z}\bar{Y}}{2}$$
$$\overline{B} = \bar{Z}$$
$$\overline{C} = \bar{Y}(1 + \frac{\bar{Z}\bar{Y}}{4})$$
$$\overline{D} = 1 + \frac{\bar{Z}\bar{Y}}{2}$$



Cuadripolo en L

$$\overline{A} = 1$$
$$\overline{B} = \bar{Z}$$
$$\overline{C} = \bar{Y}$$
$$\overline{D} = 1 + \bar{Z}\bar{Y}$$

Índice

1 Introducción

2 Utilización: problemas de transferencia y de transmisión

3 Matrices de admitancias, impedancias y de transmisión

4 Tipos de cuadripolos

5 Cuadripolos en cascada

- Dos cuadripolos se dicen que están en cascada cuando la salida de uno es la entrada del siguiente
  - Para el cuadripolo 1

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_{S1} \\ \bar{I}_{S1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_1 & \bar{B}_1 \\ \bar{C}_1 & \bar{D}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V}_{R1} \\ \bar{I}_{R1} \end{bmatrix}$$

  - Para el cuadripolo 2

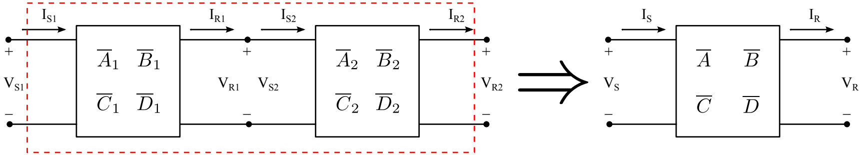
$$\begin{bmatrix} \bar{V}_{S2} \\ \bar{I}_{S2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_2 & \bar{B}_2 \\ \bar{C}_2 & \bar{D}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V}_{R2} \\ \bar{I}_{R2} \end{bmatrix}$$

  - Para la combinación

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_{S} \\ \bar{I}_{S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{V}_{S1} \\ \bar{I}_{S1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_1 & \bar{B}_1 \\ \bar{C}_1 & \bar{D}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V}_{R1} \\ \bar{I}_{R1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_1 & \bar{B}_1 \\ \bar{C}_1 & \bar{D}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V}_{S2} \\ \bar{I}_{S2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_1 & \bar{B}_1 \\ \bar{C}_1 & \bar{D}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}_2 & \bar{B}_2 \\ \bar{C}_2 & \bar{D}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V}_{R2} \\ \bar{I}_{R2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_1 & \bar{B}_1 \\ \bar{C}_1 & \bar{D}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}_2 & \bar{B}_2 \\ \bar{C}_2 & \bar{D}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V}_{R} \\ \bar{I}_{R} \end{bmatrix}$$

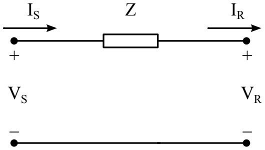
    - Luego:

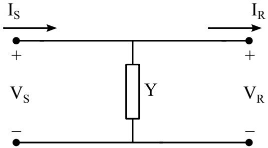
$$\begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_1 & \bar{B}_1 \\ \bar{C}_1 & \bar{D}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}_2 & \bar{B}_2 \\ \bar{C}_2 & \bar{D}_2 \end{bmatrix}$$



Cuadripolos en cascada: ejemplo

- Calcular los parámetros de transmisión de los siguientes cuadripolos:





- Obtener los modelos de los cuadripolos simétricos a partir de los cuadripolos anteriores