

Cálculo eléctrico de líneas I

Resistencias e inductancias

Juan Alvaro Fuentes Moreno
juanalvaro.fuentes@upct.es

Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad Politécnica de Cartagena

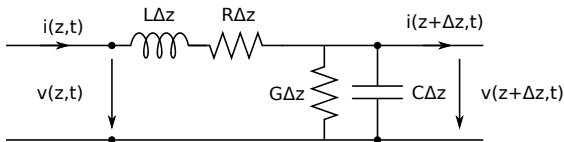
enero 2012

Índice

- 1** Introducción
- 2 Cables conductores: materiales y composición
- 3 Resistencia de la línea
- 4 Inductancia de la línea: flujo interno y externo
- 5 Líneas polifásicas: concepto de inductancia aparente
- 6 Inductancia de líneas monofásicas
- 7 Inductancia de líneas trifásicas

■ Líneas eléctricas

- Elementos básicos de las redes eléctricas cuya función es el transporte de la energía eléctrica entre dos puntos
- Se caracteriza utilizando 4 parámetros que afectan a su funcionamiento: resistencia, inductancia, capacidad y conductancia
- Tipos de líneas
 - Líneas aéreas, utilizadas sobre todo en transporte y distribución
 - Líneas subterráneas, utilizados sobre todo en distribución
 - Barras rígidas desnudas sobre aisladores, utilizados en subestaciones y centros de transformación
- Elementos
 - Conductores
 - Aisladores
 - Estructuras de apoyo
 - Cable de tierra o de protección
- En esta lección obtendremos los parámetros L y R en función de:
 - Longitud de la línea
 - Tipo de conductor
 - Espaciamiento entre conductores
 - Intensidades de los conductores



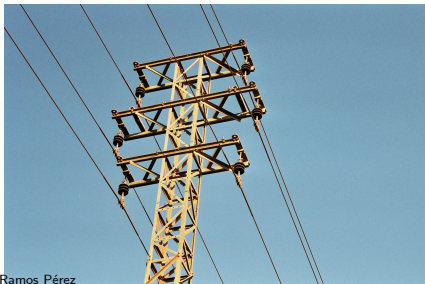
Líneas eléctricas: ejemplos I

■ Línea trifásica



Fuente: Carlos Ramos Pérez

■ Línea doble

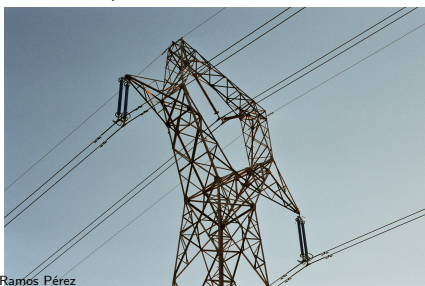


■ Línea doble + dos de tierra



Fuente: Carlos Ramos Pérez

■ Línea duplex



Líneas eléctricas: ejemplos II

■ Línea duplex



Fuente: Máster Energías Renovables UCLM

■ Apoyo en ángulo



Fuente: <http://www.terna.it>

■ Mantenimiento



■ Seccionador



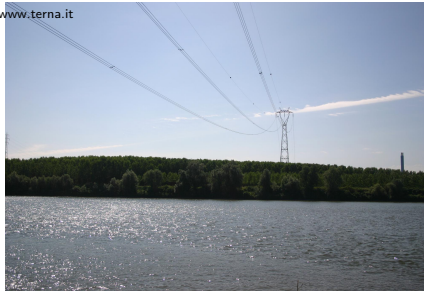
Líneas eléctricas: ejemplos III

■ Apoyo en ángulo línea triplex

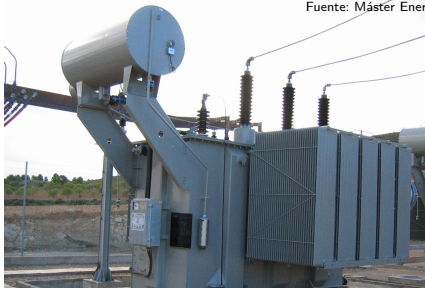


Fuente: <http://www.terna.it>

■ Paso de un río



■ Pletina secundario trafo



Fuente: Máster Energías Renovables UCLM

■ Pletina secundario trafo II



Índice

- 1 Introducción
- 2 Cables conductores: materiales y composición**
- 3 Resistencia de la línea
- 4 Inductancia de la línea: flujo interno y externo
- 5 Líneas polifásicas: concepto de inductancia aparente
- 6 Inductancia de líneas monofásicas
- 7 Inductancia de líneas trifásicas

- Representa del 30 al 35 % del coste total de una línea
- Reglamento LAT, RD 223/2008
 - Conductores desnudos (líneas aéreas)
 - Diseñados, seleccionados y ensayados para cumplir con los requisitos
 - Eléctricos
 - Mecánicos
 - Telecomunicaciones
 - Protección contra las vibraciones
 - Conductor
 - Cobre, aluminio, acero y sus aleaciones y combinaciones
 - Sección nominal mínima
 - Cobre y sus aleaciones: 10mm^2
 - Acero galvanizado: 12.5mm^2
 - Su carga de rotura sea mayor de 3500N
 - Cables aislados (líneas subterráneas)
 - Conductor
 - Cobre y aluminio
 - Aislamiento
 - PVC: Policloruro de vinilo
 - XLPE: Polietileno reticulado
 - EPR: Etileno Propileno
 - HEPR: Etileno Propileno de alto módulo
 - Apantallados
 - Protegidos contra la corrosión
 - Unipolares o tripolares

■ Conductores aluminio (UNE-EN 50182)

- Hilos redondos o con forma trapezoidal + refuerzo de hilos de acero galvanizado o acero recubierto de aluminio
- Temperatura de servicio: normal 85º, máxima 100º
- Tipos
 - AL1: homogéneos de aluminio
 - ALx: aleación de aluminio
 - AL1/STyz o ALx/STyz: aluminio o aleación de aluminio + acero galvanizado
 - AL1/SAyz o ALx/SAyz: aluminio o aleación de aluminio + acero recubierto de aluminio
 - AL1/ALx: aluminio + aleación de aluminio
 - Ej: 401AL1/28ST1A = 401 mm^2 de alambres de aluminio AL1 (aluminio duro) + 28 mm^2 de alma de alambres de acero galvanizado ST1A con un recubrimiento de zinc clase A.

■ Conductores acero (UNE-EN 50182)

- Tipos
 - Acero galvanizado. Especificaciones: UNE-EN 50189
 - Acero recubierto de aluminio. Especificaciones: UNE-EN 61232

■ Conductores de cobre (UNE 207015)

- Tipos
 - Cobre
 - Aleación de cobre

■ Que contienen fibra óptica

- Conductores (OPPC's)
- Cables de tierra (OPGW's). Especificaciones UNE-EN 60794-4

Materiales conductores: ejemplos I

■ Cable desnudo aluminio



Fuente: <http://www.aralven.com>

■ Cable desnudo aluminio ACSR



Fuente: <http://www.aralven.com>

■ Cable desnudo cobre



Fuente: <http://www.aralven.com>

■ Cable fibra óptica submarino



Fuente: <http://www.nsw.com>

Materiales conductores: ejemplos II

■ Monopolar Al 600v aislado PVC



Fuente: <http://www.aralven.com>

■ Monopolar Al 25kV aislado XLPE



Fuente: <http://www.aralven.com>

■ Tetrapolar baja XLPE PVC armado



Fuente: <http://www.aralven.com>

■ Tripolar Cu 15kV mas tierra



Fuente: <http://www.aralven.com>

Índice

- 1 Introducción
- 2 Cables conductores: materiales y composición
- 3 Resistencia de la línea**
- 4 Inductancia de la línea: flujo interno y externo
- 5 Líneas polifásicas: concepto de inductancia aparente
- 6 Inductancia de líneas monofásicas
- 7 Inductancia de líneas trifásicas

■ Resistencia

- La resistencia en corriente continua se calcula como:

$$R_{cc} = \rho \frac{long}{S} (\Omega) \left\{ \begin{array}{lcl} \rho & = & \text{resistividad del conductor } (\Omega \frac{mm^2}{m}) \\ long & = & \text{longitud del conductor } (m) \\ S & = & \text{sección del conductor } (mm^2) \end{array} \right. \quad (1)$$

- Varía con la temperatura y su dependencia se puede expresar utilizando una de estas dos ecuaciones:

$$R_2 = R_1 [1 + \alpha \cdot (\theta_2 - \theta_1)] \quad (2)$$

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{T_o + \theta_2}{T_o + \theta_1} \quad (3)$$

Donde α y T_o son coeficientes que dependen del material

	$\rho_{20C} (\Omega \cdot mm^2/m)$	$\alpha (1/^{\circ}C)$	$T_o (^{\circ}C)$
Cobre	0.017241	0.00393	234.5
Aluminio	0.028264	0.00403	228
Aluminio aleado	0.03250		
Acero galvanizado	0.192		
Acero recubierto aluminio	0.0848		

Tabla: Características de materiales conductores.

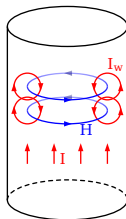
Materiales conductores: resistencia II

- La resistencia efectiva de un conductor se calcula como:

$$R_{ca} = \frac{P_p}{I^2} (\Omega) \left\{ \begin{array}{l} P_p = \text{potencia de pérdidas medida} \\ I = \text{valor eficaz de la intensidad que circula} \end{array} \right. \quad (4)$$

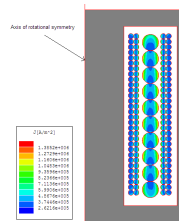
- Las diferencias entre esta resistencia efectiva y la resistencia de continua se debe a:
 - Longitud helicoidal de los hilos (alambres), función de la capa que ocupan
Incremento de un 1 % a un 3 % de la R_{cc}
 - Frecuencia: **Efecto skin**
Incremento de la resistencia
 - Distancia a otros conductores y frecuencia de las intensidades de estos: **Efecto proximidad**
Despreciable en los aéreos pero puede ser importante en los cables aislados.
 - Intensidad de la corriente en los conductores magnéticos

Justificación del efecto skin



Fuente: <http://www.wikipedia.com>

Efecto proximidad en un transformador



Fuente: <http://www.wikipedia.com>

- La resistencia efectiva podría ser calculada mediante una expresión del tipo:

$$R_{ca} = R_{cc1} \cdot [1 + \alpha \cdot (\theta_2 - \theta_1)] \cdot (1 + K_s) \cdot (1 + K_p) \quad (5)$$

Donde K_s y K_p son coeficientes que dependen del efecto skin y proximidad

- Normalmente los valores de resistencia se encuentran tabulados para diferentes condiciones normales de funcionamiento

	$R_{cc20^{\circ}C} (\Omega/km)$	$R_{ca20^{\circ}C} (\Omega/km)$	$R_{ca50^{\circ}C} (\Omega/km)$
LA-280 (Hawk)	0.119	0.119	0.131
LA-380 (Gull)	0.085	0.085	0.091
LA-455 (Condor)	0.072	0.073	0.083

Tabla: Valores de resistencias de algunos conductores.

Materiales conductores: resistencia IV

■ Cálculo de resistencia

- Conductores tipo AL1: $\rho = 0.028264 \Omega \frac{mm^2}{m}$

- Cálculo de R en continua: Ejemplo 28-AL1

$$R_{1km}^{c.c.} = \rho \frac{l_{km}}{mm^2} = 0.028264 * 1e3/7 * \pi * (2.25/2)^2 = 1.0155 \frac{\Omega}{km} \neq 1.0268 \frac{\Omega}{km} ?$$

- Incremento de longitud debido al cableado del 1 %-3 % según composición (tabla 4 UNE-EN 50182)
- Para 7 alambres: Incremento de longitud=1.11 % $\Rightarrow 1.0155 * 1.0111 = 1.0268$

Tabla F.28
Características de los conductores de aluminio utilizados en España – Tipo AL1

Código	Código antiguo	Sección	Nº de alambres	Diámetro		Masa por unidad de longitud	Resistencia a la tracción asignada	Resistencia en c.c.
				Alambre	Conductor			
		mm²		mm	mm			
28-AL1	L 28	27,8	7	2,25	6,75	76,1	5,01	1,026 8
43-AL1	L 40	43,1	7	2,80	8,40	117,8	7,33	0,663 0
55-AL1	L 56	54,6	7	3,15	9,45	149,1	9,00	0,523 9
76-AL1	L 80	75,5	19	2,25	11,3	207,6	13,60	0,380 4
117-AL1	L 110	117,0	19	2,80	14,0	321,5	19,89	0,245 6
148-AL1	L 145	148,1	19	3,15	15,8	407,0	24,43	0,194 1
188-AL1	L 180	188,1	19	3,55	17,8	516,9	30,09	0,152 8
279-AL1	L 280	279,3	37	3,10	21,7	770,2	46,08	0,103 3
381-AL1	L 400	381,0	61	2,82	25,4	1 054,1	64,77	0,075 9
454-AL1	L 450	454,5	61	3,08	27,7	1 257,5	74,99	0,063 7
547-AL1	L 550	547,3	61	3,38	30,4	1 514,4	90,31	0,052 9
638-AL1	L 630	638,3	61	3,65	32,9	1 766,0	102,12	0,045 3

NOTA - La dirección de cableado de la capa externa es "a derecha" (Z).

- Si los alambres/hilos de un cable son todos del mismo diámetro se cumplen las siguientes expresiones:

$$N = 3(n^2 - n) + 1 \left\{ \begin{array}{ll} N & = \text{número total de alambres} \\ n & = \text{número total de capas} \end{array} \right. \quad (6)$$

$$\frac{S_u}{S_t} = \frac{N}{(2n - 1)^2} \left\{ \begin{array}{ll} S_u & = \text{sección útil del cable} \\ S_t & = \text{sección total} \end{array} \right. \quad (7)$$

■ Conductores tipo AL2

Tabla F.29
Características de los conductores de aleación de aluminio utilizados en España – Tipo AL2

Código	Código antiguo	Sección mm ²	Nº de alambres	Diámetro		Masa por unidad de longitud	Resistencia a la tracción asignada	Resistencia en c.c.
				Alambre	Conductor			
				mm	mm	kg/km	kN	Ω /km
28-AL2	D 28	27,8	7	2,25	6,75	76,0	9,05	1,193 0
43-AL2	D 40	43,1	7	2,80	8,40	117,7	14,01	0,770 4
55-AL2	D 56	54,6	7	3,15	9,45	148,9	17,73	0,608 7
76-AL2	D 80	75,5	19	2,25	11,3	207,4	24,55	0,442 0
117-AL2	D 110	117,0	19	2,80	14,0	321,2	38,02	0,285 4
148-AL2	D 145	148,1	19	3,15	15,8	406,5	48,12	0,225 5
188-AL2	D 180	188,1	19	3,55	17,8	516,3	59,24	0,177 6
279-AL2	D 280	279,3	37	3,10	21,7	769,3	90,76	0,120 0
381-AL2	D 400	381,0	61	2,82	25,4	1 053,0	123,82	0,088 2
454-AL2	D 450	454,5	61	3,08	27,7	1 256,1	147,71	0,074 0
547-AL2	D 550	547,3	61	3,38	30,4	1 512,7	177,88	0,061 4
638-AL2	D 630	638,3	61	3,65	32,9	1 764,0	201,06	0,052 7

NOTA - La dirección de cableado de la capa externa es "a derecha" (Z).

Materiales conductores: resistencia VII

■ Conductores tipo AL1/ST1

Tabla F.30

Características de los conductores de aluminio reforzado con acero utilizados en España – Tipo AL 1/ST 1A

Código	Código antiguo	Sección			Nº de alambres		Diámetro del alambre		Diámetro		Masa por unidad de longitud	Resistencia a la tracción asignada	Resistencia en c.c.
		Al	Acero	Total			Al	Acero	Alma	Conductor			
		mm²	mm²	mm²	Al	Acero	mm	mm	mm	mm			
27-AL 1/4-ST1A	LA 30	26,7	4,45	31,1	6	1	2,38	2,38	2,38	7,14	107,8	9,74	1,073 6
47-AL 1/8-ST1A	LA 56	46,8	7,79	54,6	6	1	3,15	3,15	3,15	9,45	188,8	16,29	0,612 9
67-AL 1/11-ST1A	LA 78	67,3	11,2	78,6	6	1	3,78	3,78	3,78	11,3	271,8	23,12	0,425 6
94-AL 1/22-ST1A	LA 110	94,2	22,0	116,2	30	7	2,00	2,00	6,00	14,0	432,5	43,17	0,306 7
119-AL 1/28-ST1A	LA 145	119,3	27,8	147,1	30	7	2,25	2,25	6,75	15,8	547,4	54,03	0,242 3
147-AL 1/34-ST1A	LA 180	147,3	34,4	181,6	30	7	2,50	2,50	7,50	17,5	675,8	64,94	0,196 3
242-AL 1/39-ST1A	LA 280 HAWK	241,6	39,5	281,1	26	7	3,44	2,68	8,04	21,8	976,2	84,89	0,119 5
337-AL 1/44-ST1A	LA 380 GULL	337,3	43,7	381,0	54	7	2,82	2,82	8,46	25,4	1 274,6	107,18	0,085 7
402-AL 1/52-ST1A	LA 455 CONDOR	402,3	52,2	454,5	54	7	3,08	3,08	9,24	27,7	1 520,5	123,75	0,071 9
485-AL 1/63-ST1A	LA 545 CARDINAL	484,5	62,8	547,3	54	7	3,38	3,38	10,1	30,4	1 831,1	149,04	0,059 7
565-AL 1/72-ST1A	LA 635 FINCH	565,0	71,6	636,6	54	19	3,65	2,19	11,0	32,9	2 123,0	174,14	0,051 2

NOTA – La dirección de cableado de la capa externa es "a derecha" (Z).

Índice

- 1 Introducción
- 2 Cables conductores: materiales y composición
- 3 Resistencia de la línea
- 4 Inductancia de la línea: flujo interno y externo**
- 5 Líneas polifásicas: concepto de inductancia aparente
- 6 Inductancia de líneas monofásicas
- 7 Inductancia de líneas trifásicas

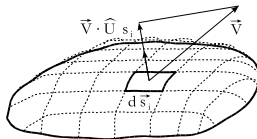
Inductancia de la línea

- Es el parámetro mas importante de la impedancia de la línea
- Inductancia es un parámetro utilizado para calcular el flujo magnético creado por una intensidad

- Se define el flujo Φ de un campo vectorial $\vec{V}$ a través de una superficie S como el resultado de

$$\Phi = \int_S \vec{V} \cdot d\vec{s} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \vec{V}_i \cdot \Delta \vec{s}_i \left\{ \begin{array}{l} N \\ \Delta \vec{s} \end{array} \right. \begin{array}{l} = \text{es una partición de la superficie } S \\ = \text{es de módulo } \Delta s \text{ y perpendicular a ella} \end{array}$$

(8)

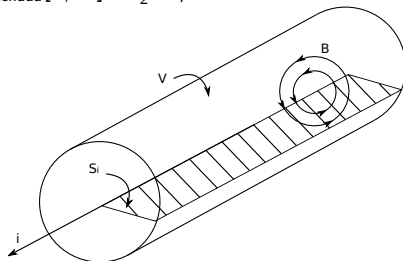


- *Flujo magnetico = Inductancia · Intensidad* $\Rightarrow$

- ¿Quién crea el campo magnético?
 - Propio conductor $\Rightarrow$ Autoinducción
 - Otro conductor $\Rightarrow$ Inducción mutua
- ¿Cuál es la superficie sobre la que calculamos el flujo?
 - Contenida en el interior del conductor que crea el campo $\Rightarrow$ Inductancia interna
 - Superficie exterior al conductor que crea el campo $\Rightarrow$ Inductancia externa

Inductancia debida al flujo interno

■ Utilizaremos $E_{\text{almacenada}}^{\text{volumen}} [J/m] = \frac{1}{2} L_{\text{superficie}} \cdot i^2$



- El volumen debe contener todas las líneas de campo magnético creadas por i y que atraviesa la superficie interna S_i
- La energía en un volumen V se calcula como:

$$E = \int_V \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} dv \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{H} = \text{Intensidad de campo magnético} \\ \vec{B} = \text{Densidad de flujo magnético} \end{array} \right. \quad (9)$$

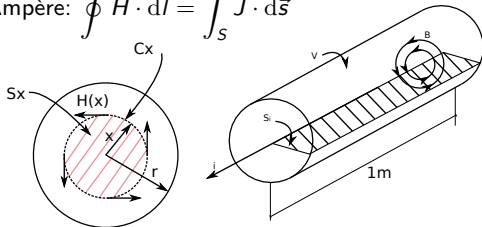
- Si el medio es lineal, se verifica que: $\vec{B} = \mu \vec{H} \Rightarrow$

$$E = \int_V \frac{1}{2} \mu H^2 dv$$

- Entonces necesitamos calcular $\vec{H}$ en cada punto del volumen para calcular E

Inductancia debida al flujo interno: $H(x) = \frac{x}{2\pi r^2} i \ (x \leq r)$

■ Cálculo de $\vec{H} \Rightarrow$ Ley de Ampère: $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$



■ En el interior del conductor se cumple: $H(x) = \frac{x}{2\pi r^2} i \ (x \leq r)$

Demostración.

■ $\oint_{C_x} \vec{H} \cdot d\vec{l} = H(x) 2\pi x$

■ $\int_{S_x} \vec{J} \cdot d\vec{s} = \frac{\pi x^2}{\pi r^2} i = \frac{x^2}{r^2} i$ (Suponiendo distribución uniforme de la intensidad)

■ Igualando: $H(x) 2\pi x = \frac{x^2}{r^2} i \Rightarrow H(x) = \frac{x}{2\pi r^2} i$



Inductancia debida al flujo interno: $L_i = \frac{\mu}{8\pi} \left[\frac{H}{m} \right]$

- Conocido $H(x)$ en el volumen interno V_i y suponiendo que el material conductor es lineal, la inductancia interna L_i se calcula a partir de:

$$E = \int_{V_i} \frac{1}{2} \mu H^2 dv = \frac{1}{2} L_i \cdot i^2 \quad (10)$$

- La inductancia interna viene dada por: $L_i = \frac{\mu}{8\pi} \left[\frac{H}{m} \right]$

- La inductancia interna es independiente del radio del conductor y depende de μ , la permeabilidad del conductor
- Por tanto, el flujo concatenado por la superficie interior es: $\Phi_i = \int_{S_i} \vec{B} \cdot d\vec{s} = L_i \cdot i$

Demostración.

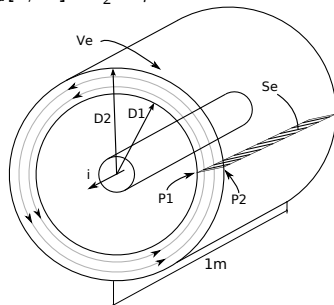
$$\begin{aligned} E = \int_{V_i} \frac{1}{2} \mu H^2 dv &= \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{2} \mu H_i(x)^2 x dx d\theta dz = \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{2} \mu \frac{x^3}{4\pi^2 r^4} i^2 dx d\theta dz \\ &= \frac{1}{2} \mu \frac{i^2}{4\pi^2 r^4} \cdot \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^r \cdot 2\pi \cdot 1 \\ &= \frac{\mu}{16\pi} i^2 \end{aligned} \quad (11)$$

- Igualando: $\frac{\mu}{16\pi} i^2 = \frac{1}{2} L_i \cdot i^2 \Rightarrow L_i = \frac{\mu}{8\pi} \left[\frac{H}{m} \right]$



Inductancia debida al flujo externo

■ Utilizaremos $E_{\text{almacenada}}^{\text{volumen}} [J/m] = \frac{1}{2} L_{\text{superficie}} \cdot i^2$



- El volumen debe contener todas las líneas de campo magnético creadas por i y que atraviesa la superficie externa S_e^{P1P2}
- La energía en un volumen V se calcula como:

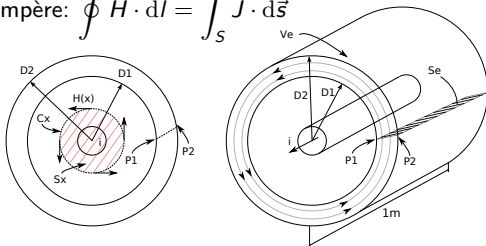
$$E = \int_V \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} dv \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{H} = \text{Intensidad de campo magnético} \\ \vec{B} = \text{Densidad de flujo magnético} \end{array} \right. \quad (12)$$

- Si el medio es lineal, se verifica que: $\vec{B} = \mu \vec{H} \Rightarrow$
$$E = \int_V \frac{1}{2} \mu H^2 dv$$

- Entonces necesitamos calcular $\vec{H}$ en cada punto del volumen para calcular E

Inductancia debida al flujo externo: $H(x) = \frac{i}{2\pi x}$ ($x \geq r$)

■ Cálculo de $\vec{H} \Rightarrow$ Ley de Ampère: $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$



■ En el exterior del conductor se cumple: $H(x) = \frac{i}{2\pi x}$ ($x \geq r$)

Demostración.

■ $\oint_{C_x} \vec{H} \cdot d\vec{l} = H(x)2\pi x$

■ $\int_{S_x} \vec{J} \cdot d\vec{s} = i$

■ Igualando: $H(x)2\pi x = i \Rightarrow H(x) = \frac{i}{2\pi x}$

Inductancia debida al flujo externo: $L_e^{P_1 P_2} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{D_2}{D_1} \left[\frac{H}{m} \right]$

- Conocido $H(x)$ en el volumen externo V_e y suponiendo que el material conductor es lineal, la inductancia externa $L_e^{P_1 P_2}$ de la superficie S_e , limitada por rectas que cortan al plano transversal en P_1 y P_2 , se calcula a partir de:

$$E = \int_{V_e} \frac{1}{2} \mu H^2 dv = \frac{1}{2} L_e^{P_1 P_2} \cdot i^2 \quad (13)$$

- La inductancia externa viene dada por: $L_e = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{D_2}{D_1} \left[\frac{H}{m} \right]$
 - La inductancia externa depende de la superficie ($S_e^{P_1 P_2}$)
 - Por tanto, el flujo concatenado por la superficie exterior $S_e^{P_1 P_2}$ debido a la intensidad i que circula por el conductor es: $\Phi_e = \int_{S_e} \vec{B} \cdot d\vec{s} = L_e^{P_1 P_2} \cdot i$

Demostración.

$$\begin{aligned} E &= \int_{V_e} \frac{1}{2} \mu H^2 dv = \int_{D_1}^{D_2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{2} \mu H_e(x)^2 x dx d\theta dz = \int_{D_1}^{D_2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{2} \mu \frac{i^2}{4\pi^2 x^2} x dx d\theta dz \\ &= \frac{1}{2} \mu \frac{i^2}{4\pi^2} \cdot [\ln x]_{D_1}^{D_2} \cdot 2\pi \cdot 1 \\ &= \frac{\mu i^2}{4\pi} \ln \frac{D_2}{D_1} \end{aligned} \quad (14)$$

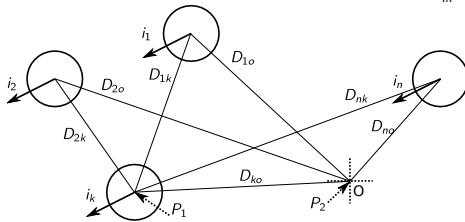
- Igualando: $\frac{\mu i^2}{4\pi} \ln \frac{D_2}{D_1} = \frac{1}{2} L_e^{P_1 P_2} \cdot i^2 \Rightarrow L_e^{P_1 P_2} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{D_2}{D_1} \left[\frac{H}{m} \right]$

Índice

- 1 Introducción
- 2 Cables conductores: materiales y composición
- 3 Resistencia de la línea
- 4 Inductancia de la línea: flujo interno y externo
- 5 Líneas polifásicas: concepto de inductancia aparente**
- 6 Inductancia de líneas monofásicas
- 7 Inductancia de líneas trifásicas

Líneas polifásicas: cálculo del flujo concatenado $\Phi_{ko} = \sum_{l=1}^n \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{D_{lo}}{D_{lk}} i_l$

- Dado el sistema de n conductores que transportan intensidades i_l , el flujo Φ , por unidad de longitud, en la superficie rectangular limitada por el eje del conductor k y por una recta que pasa por el punto O es: $\Phi_{ko} = \sum_{l=1}^n \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{D_{lo}}{D_{lk}} i_l$



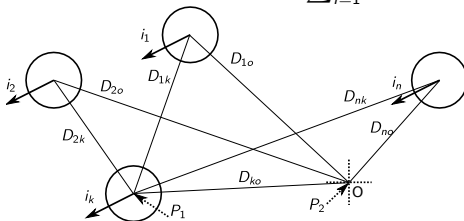
Demostración.

- Aplicando superposición y suponiendo μ del conductor y del medio iguales $\Rightarrow$

$$\Phi_{ko} = \sum_{l=1}^n \Phi_l = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{D_{1o}}{D_{1k}} i_1 + \dots + \left[\frac{\mu}{8\pi} i_k + \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{D_{ko}}{r_k} i_k \right] + \dots + \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{D_{no}}{D_{nk}} i_n$$
- $\Phi_k = \frac{\mu}{8\pi} i_k + \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{D_{ko}}{r_k} i_k = \frac{\mu}{2\pi} i_k \cdot \left[\frac{1}{4} + \ln \frac{D_{ko}}{r_k} \right] = \frac{\mu}{2\pi} \left[\ln e^{\frac{1}{4}} + \ln \frac{D_{ko}}{r_k} \right] i_k = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{D_{ko}}{e^{-1/4} r_k} i_k$
- Si se define como **radio corregido**: $r'_k \triangleq e^{-1/4} r_k \approx 0.7788 r_k \Rightarrow \Phi_k = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{D_{ko}}{r'_k} i_k$
- Si se utiliza la notación $D_{kk} = r'_k \Rightarrow \Phi_k = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{D_{ko}}{D_{kk}} i_k$ y $\Phi_{ko} = \sum_{l=1}^n \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{D_{lo}}{D_{lk}} i_l$

Líneas polifásicas: cálculo diferencia de potencial $\bar{v}_k = \sum_{l=1}^n j\omega L_{kl} \bar{i}_l$

- Dado el sistema de n conductores que transportan intensidades $\bar{i}_l$, la caída de tensión, por unidad de longitud, en el circuito limitado por el eje del conductor k y por una recta que pasa por el punto O es: $\bar{v}_k = \sum_{l=1}^n j\omega L_{kl} \bar{i}_l$



Demostración.

- El flujo total concatenado por el circuito es: $\Phi_{ko} = \sum_{l=1}^n \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{D_{lo}}{D_{lk}} i_l$
- Si introducimos L_{kl} como $L_{kl} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{D_{lo}}{D_{lk}} \Rightarrow \Phi_{ko} = \sum_{l=1}^n L_{kl} i_l$
- Utilizando la ley de Faraday, la diferencia de potencial en el circuito por unidad de longitud se obtiene como: $v_k = \frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow v_k = \sum_{l=1}^n L_{kl} \frac{di_l}{dt}$
- Si las intensidades forman un sistema polifásico $\Rightarrow \bar{v}_k = \sum_{l=1}^n j\omega L_{kl} \bar{i}_l$



Líneas polifásicas: flujo concatenado y caída de tensión

- Dado el sistema de n conductores que transportan intensidades $\bar{i}_i$, los flujos concatenados entre los distintos conductores y la recta que pasa por el punto O se pueden expresar de forma matricial

$$\begin{bmatrix} \Phi_{1o} \\ \dots \\ \Phi_{ko} \\ \dots \\ \Phi_{no} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \dots & L_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{k1} & L_{k2} & \dots & L_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{n1} & L_{n2} & \dots & L_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ \dots \\ i_k \\ \dots \\ i_n \end{bmatrix} \quad (15)$$

- Las caídas de tensión entre cada uno de los conductores y la recta que pasa por el punto O también se pueden expresar de forma matricial

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_1 \\ \dots \\ \bar{V}_k \\ \dots \\ \bar{V}_n \end{bmatrix} = j\omega \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \dots & L_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{k1} & L_{k2} & \dots & L_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{n1} & L_{n2} & \dots & L_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{i}_1 \\ \dots \\ \bar{i}_k \\ \dots \\ \bar{i}_n \end{bmatrix} \quad (16)$$

- En donde los coeficientes de inductancia, caso general, se calculan como:

$$L_{kl} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{D_{lo}}{D_{lk}} \text{ donde } \begin{cases} \text{Si } k \neq l \Rightarrow D_{lk} = D_{lk} \\ \text{Si } k = l \Rightarrow D_{kk} = r'_k \end{cases} \quad (17)$$

Líneas polifásicas: coeficientes de inductancia $L_{kl} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{1}{D_{lk}}$

- Si se verifica que:

$$\frac{\sum_{l=1}^n i_l}{D_{lo}} \approx \frac{0}{D_o} \quad \forall l \in 1..n$$

- Entonces los coeficientes de inductancia, caso particular, se calculan como:

$$L_{kl} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{1}{D_{lk}} \text{ donde } \begin{cases} \text{Si } l \neq k \Rightarrow D_{lk} = D_{lo} \\ \text{Si } l = k \Rightarrow D_{kk} = r'_k \end{cases} \quad (18)$$

Demostración.

- El flujo total concatenado por el circuito es: $\Phi_{ko} = \sum_{l=1}^n \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{D_{lo}}{D_{lk}} i_l$
- Operando $\Phi_{ko} = \frac{\mu}{2\pi} \left\{ \sum_{l=1}^n \ln D_{lo} i_l + \sum_{l=1}^n \ln \frac{1}{D_{lk}} i_l \right\}$
- Como $D_{lo} \approx D_o \quad \forall l \in 1..n \Rightarrow \Phi_{ko} = \frac{\mu}{2\pi} \left\{ \ln D_o \sum_{l=1}^n i_l + \sum_{l=1}^n \ln \frac{1}{D_{lk}} i_l \right\}$
- Y como: $\sum_{l=1}^n i_l = 0 \Rightarrow \Phi_{ko} = \frac{\mu}{2\pi} \left\{ \sum_{l=1}^n \ln \frac{1}{D_{lk}} i_l \right\} = \sum_{l=1}^n \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{1}{D_{lk}} i_l$
- Definiendo, caso particular, los coeficientes de inductancia como: $L_{kl} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{1}{D_{lk}}$
- Entonces, flujo y tensión se obtienen de nuevo como: $\begin{cases} \Phi_{ko} &= \sum_{l=1}^n L_{kl} i_l \\ \bar{V}_k &= \sum_{l=1}^n j\omega L_{kl} \bar{I}_l \end{cases}$

Líneas polifásicas: concepto de inductancia aparente

- El flujo concatenado en el circuito formado por el conductor k y el punto O en RES, $\bar{\Phi}_{ko}$, depende de las inductancias L_{kl} y de las intensidades $\bar{I}_l \Rightarrow$ No se puede resolver por medio del monofásico equivalente
- Se define como inductancia aparente del circuito formado por el conductor k y el punto O , L_k , al parámetro obtenido como:

$$L_k = \frac{\bar{\Phi}_{ko}}{\bar{I}_k} = \frac{\sum_{l=1}^n L_{kl} \bar{I}_l}{\bar{I}_k} \quad (19)$$

- En general es un número complejo que depende de la geometría de la línea (distancias relativas) y del régimen de intensidades
- Entonces, flujo y tensión se obtienen, a partir de la inductancia aparente, como:

$$\bar{\Phi}_{ko} = L_k \bar{I}_k \quad (= \sum_{l=1}^n L_{kl} \bar{I}_l) \quad (20)$$

$$\bar{V}_k = j\omega L_k \bar{I}_k \quad (= j\omega \sum_{l=1}^n L_{kl} \bar{I}_l) \quad (21)$$

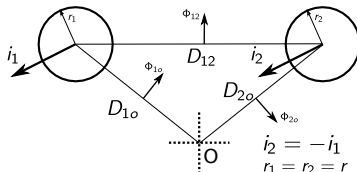
Índice

- 1 Introducción
- 2 Cables conductores: materiales y composición
- 3 Resistencia de la línea
- 4 Inductancia de la línea: flujo interno y externo
- 5 Líneas polifásicas: concepto de inductancia aparente
- 6 Inductancia de líneas monofásicas**
- 7 Inductancia de líneas trifásicas

Líneas monofásicas: inductancia cuando la línea está formada por 1 hilo

- Dada la línea monofásica que transporta las intensidades i_1 y $i_2 = -i_1$ y sus radios, r_1 y r_2 , son iguales a r , su inductancia monofásica se obtiene como:

$$\blacksquare L^{12} = L_1 + L_2 = \frac{\mu}{\pi} \ln \frac{D_{12}}{r'}$$



Demostración.

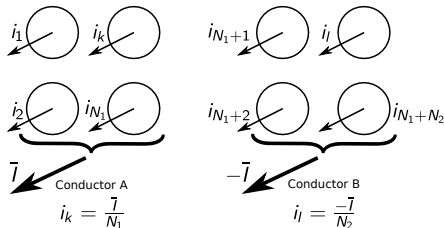
- La inductancia aparente del conductor k se obtiene de: $L_k = \frac{\bar{\Phi}_{k0}}{I_k} = \frac{\sum_{l=1}^2 L_{kl} \bar{I}_l}{I_k}$
- Como $\Phi_{12} - \Phi_{10} + \Phi_{20} = 0$ y $L^{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} \Rightarrow L^{12} = \frac{\bar{\Phi}_{10} - \bar{\Phi}_{20}}{I_1} = \frac{\bar{\Phi}_{10}}{I_1} + \frac{\bar{\Phi}_{20}}{I_2} = L_1 + L_2$
- Entonces, calcularemos L_1 y $L_2 \Rightarrow$

$$L_1 = \frac{L_{11} \bar{I}_1 + L_{12} \bar{I}_2}{\bar{I}_1} = \frac{L_{11} \bar{I}_1 - L_{12} \bar{I}_1}{\bar{I}_1} = L_{11} - L_{12} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{1}{r'_1} - \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{1}{D_{12}} \Rightarrow L_1 = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{D_{12}}{r'_1} (= \frac{\bar{\Phi}_{10}}{I_1})$$

$$L_2 = \frac{L_{21} \bar{I}_1 + L_{22} \bar{I}_2}{\bar{I}_2} = \frac{L_{22} \bar{I}_2 - L_{21} \bar{I}_2}{\bar{I}_2} = L_{22} - L_{21} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{1}{r'_2} - \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{1}{D_{21}} \Rightarrow L_2 = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{D_{21}}{r'_2} (= \frac{\bar{\Phi}_{20}}{I_2})$$
- Finalmente,

$$L^{12} = L_1 + L_2 = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{D_{12}}{r'_1} + \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{D_{21}}{r'_2} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{D_{12}^2}{r'_1 r'_2} \Rightarrow L^{12} = \frac{\mu}{\pi} \ln \frac{D_{12}}{r'}$$

Líneas monofásicas: inductancia de línea formada por varios hilos



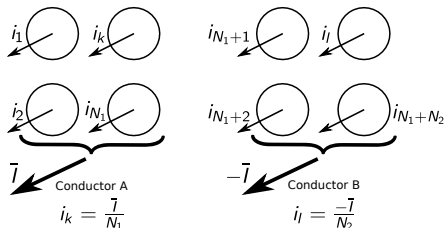
- Dada la línea monofásica que transporta las intensidades $i_A = \bar{I}$ y $i_B = -i_A = -\bar{I}$ en donde cada conductor tiene N_1 y N_2 hilos respectivamente, su inductancia monofásica se obtiene como:

$$L_A = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{DMG}{RMG_A} \text{ y } L_B = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{DMG}{RMG_B}$$

- Donde DMG y RMG son la distancia y el radio medio geométrico y se calculan como:

$$DMG = \left[\prod_{k=1}^{N_1} \prod_{l=N_1+1}^{N_1+N_2} D_{ij} \right]^{\frac{1}{N_1 \cdot N_2}}, \quad RMG_A = \left[\prod_{k=1}^{N_1} \prod_{l=1}^{N_1} D_{ij} \right]^{\frac{1}{N_1^2}} \text{ y } RMG_B = \left[\prod_{k=1}^{N_2} \prod_{l=1}^{N_2} D_{ij} \right]^{\frac{1}{N_2^2}}$$

Líneas monofásicas: inductancia de línea formada por varios hilos (II)



Demostración.

- L_A se calcula del paralelo de las L_k , inductancia aparente del hilo k de A:

$$\frac{1}{L_A} = \sum_{k=1}^{N_1} \frac{1}{L_k}.$$

- Este calculo es tedioso $\Rightarrow$ Se calcula el valor medio de L_k , L_{AV} , de A: $L_{AV} = \frac{\sum_{k=1}^{N_1} L_k}{N_1}$

- Y se hace el paralelo con este valor medio: $\frac{1}{L_A} = \sum_{k=1}^{N_1} \frac{1}{L_{AV}} = N_1 \frac{1}{L_{AV}} \Rightarrow L_A = \frac{L_{AV}}{N_1}$

- Debemos obtener primero L_k y, a continuación, calcular su valor medio $L_{AV} \Rightarrow$ Obteniéndose entonces la inductancia aparente del conductor A: $L_A = \frac{L_{AV}}{N_1}$

Demostración.

■ $L_k = \frac{\sum_{l=1}^{N_1+N_2} L_{kl} \bar{I}_l}{\bar{I}_k}$ y sustituyendo las intensidades de los hilos en sus dos posibles valores, $\bar{I}/N_1$ y $-\bar{I}/N_2$

$$L_k = \frac{\sum_{l=1}^{N_1} L_{kl} \bar{I}/N_1}{\bar{I}/N_1} - \frac{\sum_{l=N_1+1}^{N_1+N_2} L_{kl} \bar{I}/N_2}{\bar{I}/N_1} \quad (22)$$

sustituyendo L_{kl} y operando $\Rightarrow$

$$L_k = N_1 \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{\left[\prod_{l=N_1+1}^{N_1+N_2} D_{lk} \right]^{1/N_2}}{\left[\prod_{l=1}^{N_1} D_{lk} \right]^{1/N_1}} = N_1 \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{D_{mk}}{D_{sk}} \quad (23)$$

en donde se han definido

$$D_{mk} = \left[\prod_{l=N_1+1}^{N_1+N_2} D_{lk} \right]^{1/N_2} \quad \text{y} \quad D_{sk} = \left[\prod_{l=1}^{N_1} D_{lk} \right]^{1/N_1} \quad (24)$$

Líneas monofásicas: inductancia de línea formada por varios hilos (IV)

Demostración.

■ $L_k = N_1 \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{D_{mk}}{D_{sk}}$

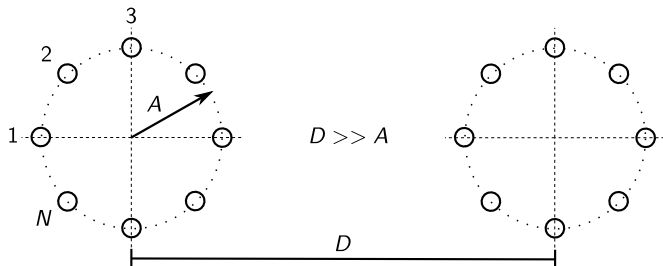
■ Ahora vamos a calcular el valor medio, L_{AV} , de las inductancias de los hilos del conductor A y, finalmente, $L_A = \frac{L_{AV}}{N_1}$

$$L_{AV} = \frac{\sum_{k=1}^{N_1} L_k}{N_1} = \frac{1}{N_1} \sum_{k=1}^{N_1} N_1 \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{D_{mk}}{D_{sk}} \Rightarrow \text{Operando: } L_{AV} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{\prod_{k=1}^{N_1} D_{mk}}{\prod_{k=1}^{N_1} D_{sk}} \quad (25)$$

■ Por lo tanto, L_A se obtiene de:

$$L_A = L_{AV} / N_1 = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{\left[\prod_{k=1}^{N_1} D_{mk} \right]^{\frac{1}{N_1}}}{\left[\prod_{k=1}^{N_1} D_{sk} \right]^{\frac{1}{N_1}}} \Rightarrow L_A = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{\left[\prod_{k=1}^{N_1} \left[\prod_{l=N_1+1}^{N_1+N_2} D_{lk} \right]^{\frac{1}{N_2}} \right]^{\frac{1}{N_1}}}{\left[\prod_{k=1}^{N_1} \left[\prod_{l=1}^{N_1} D_{lk} \right]^{\frac{1}{N_1}} \right]^{\frac{1}{N_1}}} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{DMG}{RMGA} \quad (26)$$

Líneas monofásicas: inductancia de líneas con conductores en haz

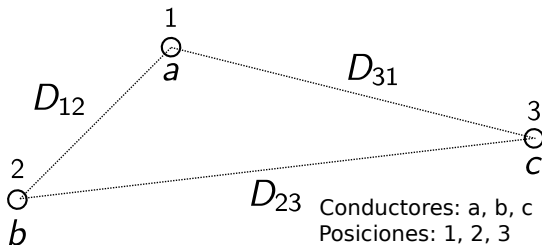


- Se dice que los conductores están en haz cuando están distribuidos uniformemente a lo largo de una circunferencia
- La expresión anteriormente obtenida sigue siendo válida aunque con las siguientes apreciaciones:

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{DMG}{RMG} \left\{ \begin{array}{l} RMG_A = RMG_B = RMG \\ DMG \approx D \\ RMG = [Nr' (A)^{N-1}]^{\frac{1}{N}} \end{array} \right. \quad (27)$$

Índice

- 1 Introducción
- 2 Cables conductores: materiales y composición
- 3 Resistencia de la línea
- 4 Inductancia de la línea: flujo interno y externo
- 5 Líneas polifásicas: concepto de inductancia aparente
- 6 Inductancia de líneas monofásicas
- 7 Inductancia de líneas trifásicas**



■ Puesto que: $\bar{I}_a + \bar{I}_b + \bar{I}_c = 0$, L_k , donde $k \in \{a, b, c\}$, se puede calcular de:

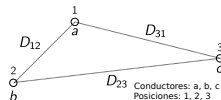
$$\bar{L}_k = \frac{\sum_{l=1}^3 L_{kl} \bar{I}_l}{\bar{I}_k} \text{ donde } L_{kl} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{1}{D_{lk}} \text{ y } \begin{cases} \text{Si } k \neq l \Rightarrow D_{lk} = D_{lk} \\ \text{Si } k = l \Rightarrow D_{kk} = r'_k \end{cases} \quad (28)$$

■ Por ejemplo: Cálculo de $\bar{L}_a$ para esta disposición de conductores: $\begin{cases} a \Rightarrow 1 \\ b \Rightarrow 2 \\ c \Rightarrow 3 \end{cases}$

$$\bar{L}_a = \frac{L_{aa}\bar{I}_a + L_{ab}\bar{I}_b + L_{ac}\bar{I}_c}{\bar{I}_a} = \frac{\frac{\mu}{2\pi} \left(\ln \frac{1}{D_{11}} \bar{I}_a + \ln \frac{1}{D_{12}} \bar{I}_b + \ln \frac{1}{D_{13}} \bar{I}_c \right)}{\bar{I}_a}$$

Líneas trifásicas: transposición

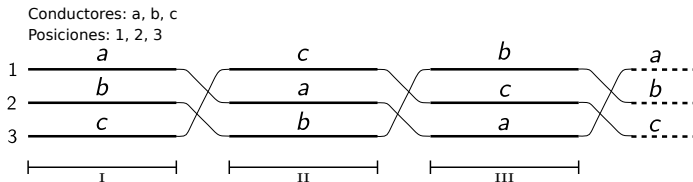
$$\bar{L}_a = \frac{L_{aa}\bar{I}_a + L_{ab}\bar{I}_b + L_{ac}\bar{I}_c}{\bar{I}_a} = \frac{\frac{\mu}{2\pi} \left(\ln \frac{1}{D_{11}} \bar{I}_a + \ln \frac{1}{D_{12}} \bar{I}_b + \ln \frac{1}{D_{13}} \bar{I}_c \right)}{\bar{I}_a}$$



■ La inductancia presenta las siguientes propiedades:

- En general $\bar{L}_a \in \mathbb{C}$ y $\bar{L}_a \neq \bar{L}_b \neq \bar{L}_c$
- $\bar{L}_k$ será función de las intensidades de todos los conductores
- Aún siendo las tensiones en origen e intensidades equilibradas las caídas de tensión no
⇒ Tensiones en el extremo de la línea serán desequilibradas

■ Solución: Transposición de las líneas



- Se dice que la línea está totalmente transpuesta si las longitudes de I, II y III son iguales.

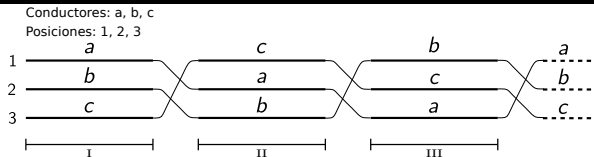
- Demostraremos que, ahora, $L_a = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{(D_{12}D_{23}D_{13})^{\frac{1}{3}}}{r'_a} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{DMG}{RMG}$

Líneas trifásicas: transposición (II)



Fuente: <http://commons.wikimedia.org/>

Líneas trifásicas: inductancia de líneas transpuestas $L = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{DMG}{RMG}$



Demostración.

■ La inductancia media por transposición completa será:

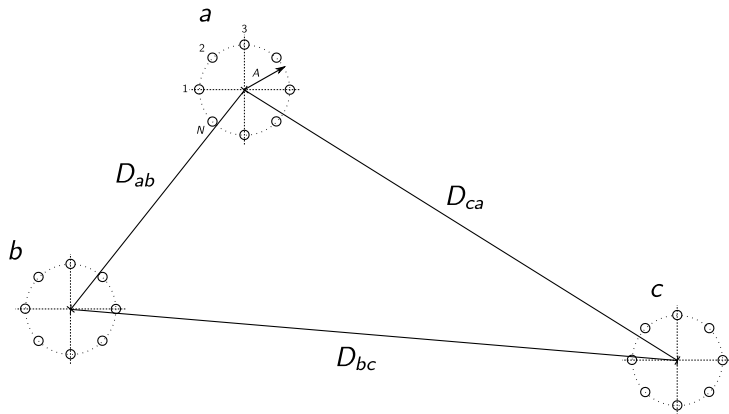
$$\begin{aligned}
 \bar{L}_a^I &= \frac{\mu}{2\pi \bar{I}_a} \left[\ln \frac{1}{D_{11}} \bar{I}_a + \ln \frac{1}{D_{12}} \bar{I}_b + \ln \frac{1}{D_{13}} \bar{I}_c \right] \\
 \bar{L}_a^{II} &= \frac{\mu}{2\pi \bar{I}_a} \left[\ln \frac{1}{D_{22}} \bar{I}_a + \ln \frac{1}{D_{23}} \bar{I}_b + \ln \frac{1}{D_{12}} \bar{I}_c \right] \\
 \bar{L}_a^{III} &= \frac{\mu}{2\pi \bar{I}_a} \left[\ln \frac{1}{D_{33}} \bar{I}_a + \ln \frac{1}{D_{13}} \bar{I}_b + \ln \frac{1}{D_{23}} \bar{I}_c \right] \\
 L_a = \frac{\bar{L}_a^I + \bar{L}_a^{II} + \bar{L}_a^{III}}{3} &= \frac{\mu}{2\pi \bar{I}_a} \left[\ln \frac{1}{r_a'} \bar{I}_a + \ln \left(\frac{1}{D_{12} D_{23} D_{13}} \right)^{\frac{1}{3}} \bar{I}_b + \ln \left(\frac{1}{D_{12} D_{23} D_{13}} \right)^{\frac{1}{3}} \bar{I}_c \right]
 \end{aligned} \tag{29}$$

■ Puesto que $\bar{I}_a + \bar{I}_b + \bar{I}_c = 0 \Rightarrow$

$$L_a = \frac{\mu}{2\pi \bar{I}_a} \left[\ln \frac{1}{r_a'} \bar{I}_a + \ln \left(\frac{1}{D_{12} D_{23} D_{13}} \right)^{\frac{1}{3}} (\bar{I}_b + \bar{I}_c) \right] = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{(D_{12} D_{23} D_{13})^{\frac{1}{3}}}{r_a'} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{DMG}{RMG} \tag{30}$$

- Donde se definen $DMG = (D_{12} D_{23} D_{13})^{\frac{1}{3}}$ y $RMG = r_a'$
- Si conductores iguales $\Rightarrow L_a = L_b = L_c = L$ y $L \in \mathbb{R} \Rightarrow$ El sistema será equilibrado

Líneas trifásicas: inductancia si conductores en haz $L = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{DMG}{RMG}$



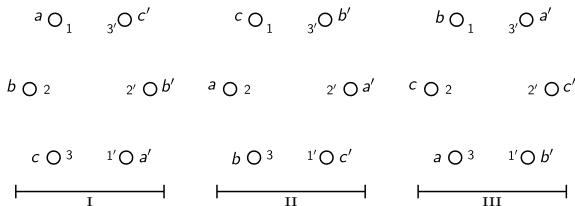
■ A partir de las expresiones generales obtenidas se puede demostrar que:

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{DMG}{RMG} \left\{ \begin{array}{l} DMG = [D_{ab} D_{bc} D_{ca}]^{\frac{1}{3}} \\ RMG = [Nr' (A)^{N-1}]^{\frac{1}{N}} \end{array} \right. \quad (31)$$

Líneas trifásicas dobles: inductancia $L = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{DMG}{RMG}$

Conductores: a, b, c, a', b', c'

Posiciones: 1, 2, 3, 1', 2', 3'



■ La línea está formada por un doble circuito en paralelo y es equilibrada realizando transposiciones entre 123 y 1'2'3' por separado.

■ A partir de las expresiones generales obtenidas se puede demostrar que:

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{DMG}{RMG} \left\{ \begin{array}{l} DMG = [D_{ab_{eq}} D_{bc_{eq}} D_{ca_{eq}}]^{\frac{1}{3}} \\ RMG = [RMG_a RMG_b RMG_c]^{\frac{1}{3}} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} D_{ab_{eq}} = [D_{12} D_{12'} D_{1'2} D_{1'2'}]^{\frac{1}{4}} \\ D_{bc_{eq}} = [D_{23} D_{23'} D_{2'3} D_{2'3'}]^{\frac{1}{4}} \\ D_{ca_{eq}} = [D_{13} D_{13'} D_{1'3} D_{1'3'}]^{\frac{1}{4}} \\ RMG_a = [D_{11} D_{11'} D_{1'1} D_{1'1'}]^{\frac{1}{4}} \\ RMG_b = [D_{22} D_{22'} D_{2'2} D_{2'2'}]^{\frac{1}{4}} \\ RMG_c = [D_{33} D_{33'} D_{3'3} D_{3'3'}]^{\frac{1}{4}} \end{array} \right.$$

Líneas trifásicas dobles: inductancia si conductores en haz $L = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{DMG}{RMG}$

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{DMG}{RMG} \left\{ \begin{array}{l} DMG = [D_{ab_{eq}} D_{bc_{eq}} D_{ca_{eq}}]^{\frac{1}{3}} \\ RMG = [RMG_a RMG_b RMG_c]^{\frac{1}{3}} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} D_{ab_{eq}} = [D_{12} D_{12'} D_{1'2} D_{1'2'}]^{\frac{1}{4}} \\ D_{bc_{eq}} = [D_{23} D_{23'} D_{2'3} D_{2'3'}]^{\frac{1}{4}} \\ D_{ca_{eq}} = [D_{13} D_{13'} D_{1'3} D_{1'3'}]^{\frac{1}{4}} \\ RMG_a = [D_{11} D_{11'} D_{1'1} D_{1'1'}]^{\frac{1}{4}} \\ RMG_b = [D_{22} D_{22'} D_{2'2} D_{2'2'}]^{\frac{1}{4}} \\ RMG_c = [D_{33} D_{33'} D_{3'3} D_{3'3'}]^{\frac{1}{4}} \end{array} \right.$$

■ Se diferencia de la línea sin conductores en haz en la traducción de los términos D_{kk}

■ Línea doble con un único conductor en cada fase del circuito:

$$D_{kk} = r'_k \quad (32)$$

■ Línea doble con N conductores en haz en cada fase del circuito:

$$D_{kk} = RMG_{haz} = [N \cdot r'_k (A)^{N-1}]^{\frac{1}{N}} \quad (33)$$

■ Línea doble con N conductores en haz y, a su vez, cada conductor del haz formado por N_1 hilos:

$$D_{kk} = RMG_{haz} = [N \cdot RMG_{conductor} (A)^{N-1}]^{\frac{1}{N}} \text{ y } RMG_{conductor} = \left[\prod_{k=1}^{N_1} \prod_{l=1}^{N_1} D_{ij} \right]^{\frac{1}{N_1^2}} \quad (34)$$