E.T.S. de Ingeniería Industrial

Universidad Politécnica de Cartagena

Curso Académico 2011/12

"Análisis de Circuitos"

Tema III. Circuitos en Régimen Estacionario Senoidal

Profesor: Dr. Antonio Gabaldón

Dpto de Ingeniería Eléctrica. E-mail: antonio.gabaldon@ upct.es

- **Lección 9**
  - Potencia en Régimen Estacionario Senoidal

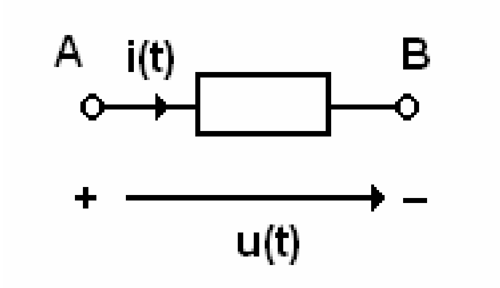
- **Un recordatorio (tema III):**
  - Potencia instantánea p(t) (estamos en el “dominio del tiempo”)
  - Cuestión (¿generada/consumida?)

$$p(t) = u(t) * i(t)$$

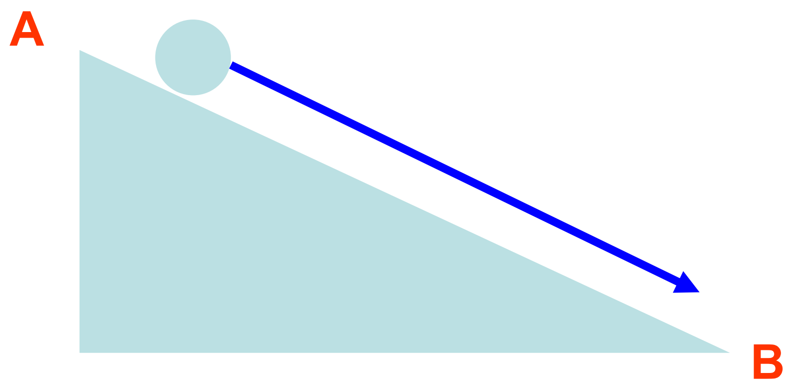
  - Energía w(t) (estamos en el “dominio del tiempo”)
  - Cuestión (¿cedida/almacenada?) Contadores de energía (€, $)

$$w(t) - w(t_0) = \int_{t0}^{t} p(t)dt$$

- **Recordar los convenio de potencias: tensiones e intensidades en el mismo sentido**
  - Suponemos $u(t) > 0$, mayor potencial en A
  - Suponemos $i(t) > 0$, movimiento de cargas + de A hacia B
- Empleamos un símil gravitatorio (potencial eléctrico vs potencial gravitatorio)



- El dipolo (masa puntual) pierde energía potencial que consume el dipolo (conservación de energía)



- Si obtenemos $p(t_1) < 0$ en un t_1 "tranquilos", nos hemos equivocado y genera: Es usual equivocarse porque suponemos u(t) e i(t).

Objetivos

- Determinar la expresión de la potencia instantánea p(t) en un dipolo
- Calcular un valor práctico de la potencia en el tiempo (€): P
- En el dominio de C (frecuencia compleja)
  - Calcular valores útiles (con sentido físico en el tiempo): P
  - Y valores con aplicaciones en cálculos en RES, o que pueden ser interpretados físicamente: Q y S

$$p(t)$$

$$P = \frac{1}{T}\int_{a}^{a+T} p(t)dt$$

$$P, Q, S, \overline{S}$$

Tiempo

Frecuencia compleja

- Empezaremos con elementos simples para llegar a un dipolo complejo

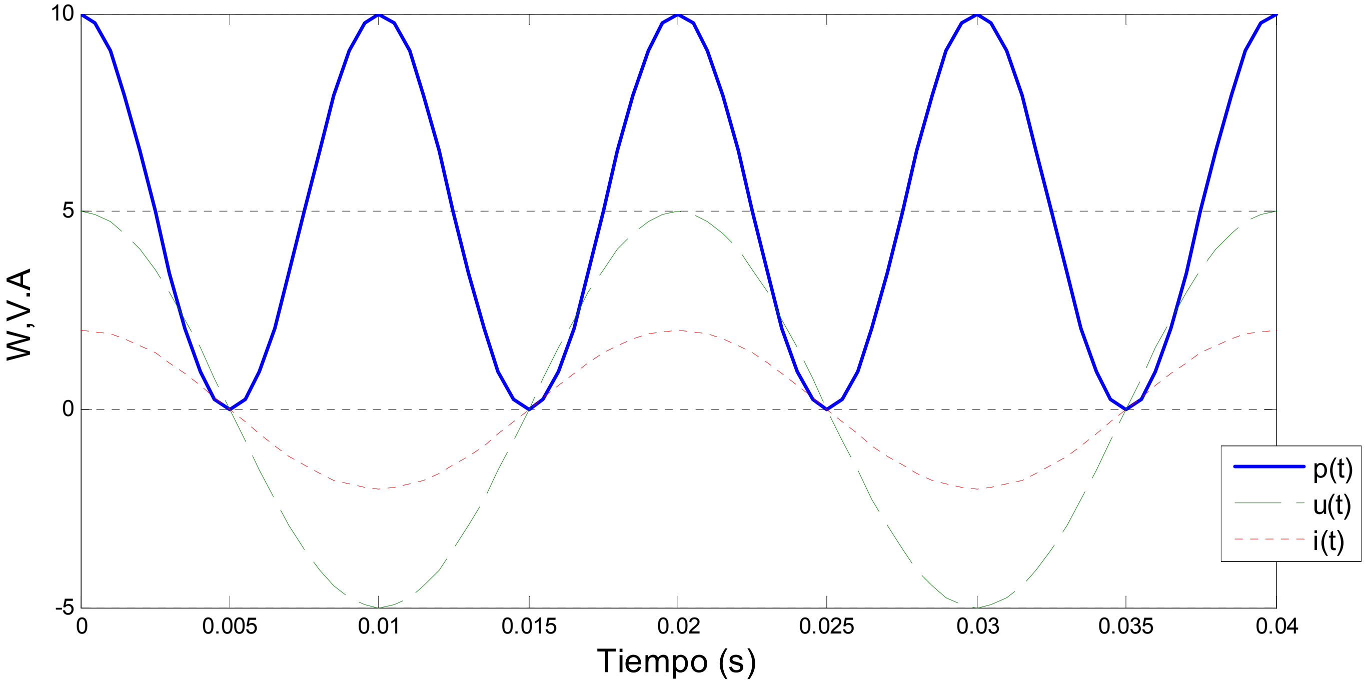
Resistencias

- Potencia instantánea p(t) (criterio de consumo)

$$p(t) = u(t)i(t) = \frac{u^2(t)}{R} = Ri^2(t) = 2UIsen^2(wt) = UI[1-\cos(2wt)] \geq 0$$

$$u(t) = \sqrt{2}Usen(wt)$$

$$i(t) = \sqrt{2}Isen(wt)$$



- La potencia p(t) es senoidal +Cte pero con 2*w (2*f)

- **Una pregunta ¿qué son los 100W, 60W ó 40W de una bombilla? ¿el máximo de p(t) u otra cosa?** **Figure source: web Comisión Europea (+ info sobre eficiencia http://www.demandresponse.eu)**

- **¿Qué nos cobran los comercializadores en el recibo de "la luz"?**

2 FACTURACIÓN

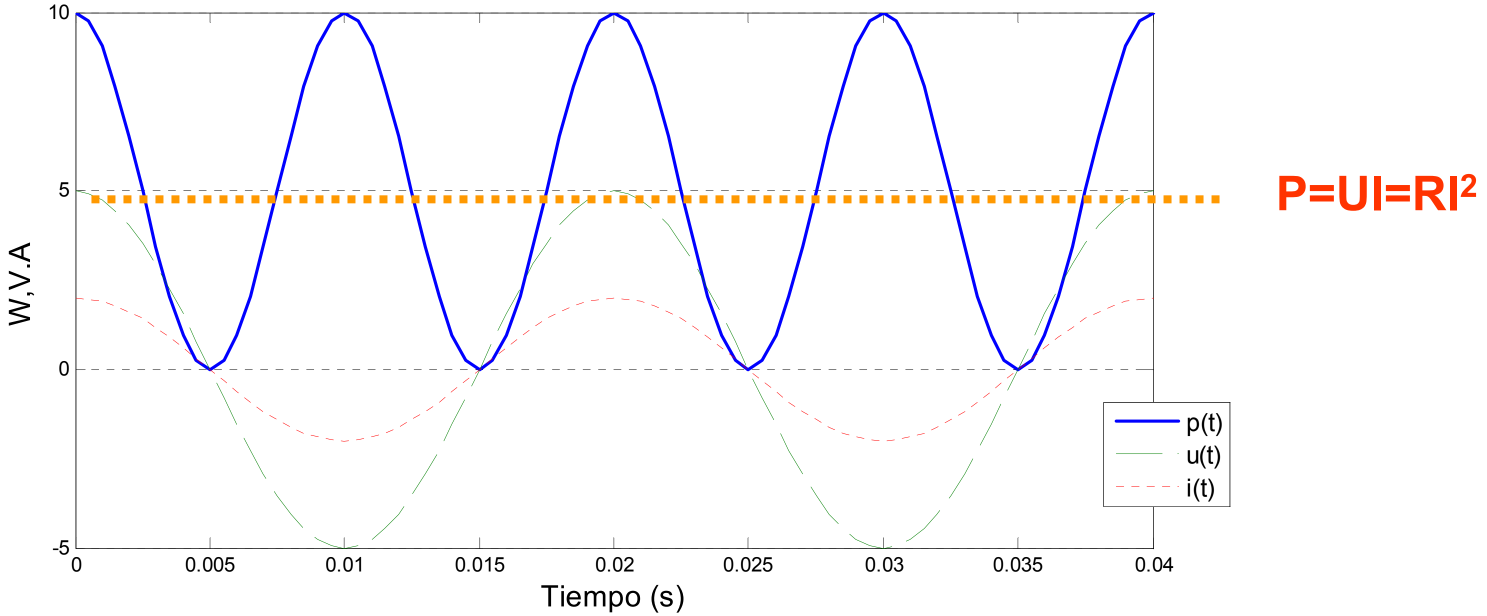
		EUROS
ENERGIA		
Potencia contratada	*3,3 kW x 28 días x 0,056529 €/kW día*	5,22
Energía consumida	*382 kWh x 0,140069 €/kWh*	53,51
Impuesto sobre electricidad	*4,864% s/58,73 x 1,05113*	3,00
TOTAL ENERGIA		61,73

SERVICIOS Y OTROS CONCEPTOS		
Alquiler equipos de medida	*28 días x 0,017753 €/día*	0,50
TOTAL SERVICIOS Y OTROS CONCEPTOS		0,50

- **Para calcular nuestros consumos (recibos), el valor medio de p(t) (P: potencia activa) es muy interesante …**

$$w(t) - w(t_0) = \int_{t0}^{t} p(t)dt = (t - t_0) * \left[\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t)dt \right] = (t - t_0) * P$$

$$P = (media.\, p(t)) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t)dt$$



- **P, el valor medio de p(t), depende de valores eficaces U e I**

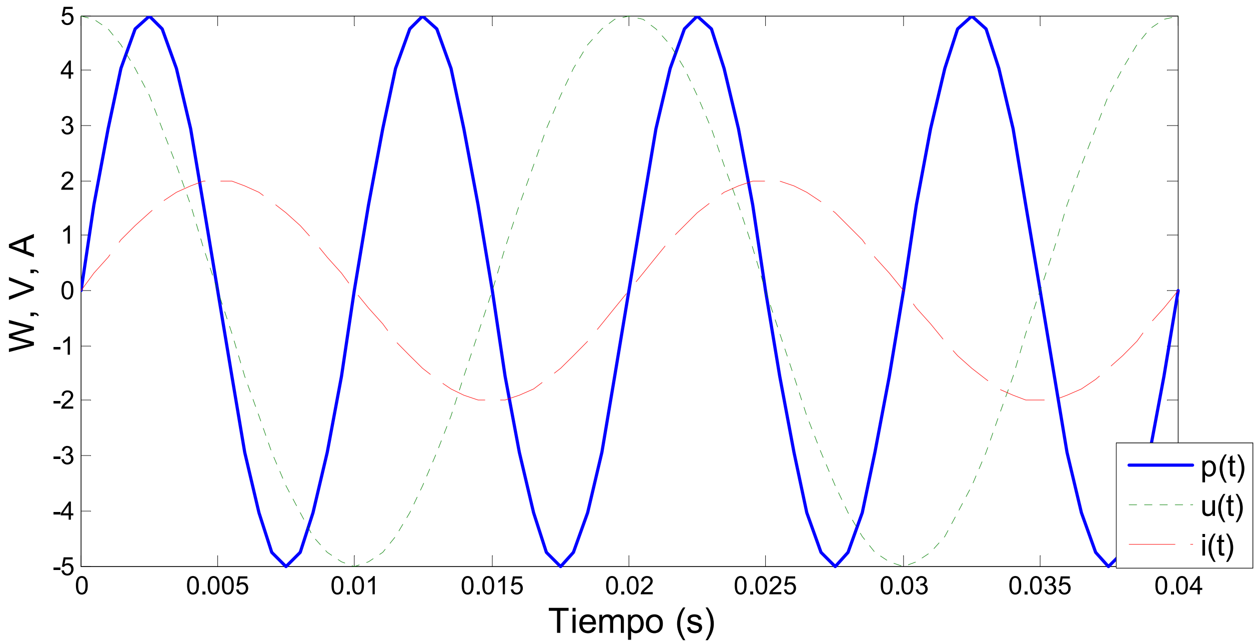
Inductancias

- Potencia instantánea p(t) (criterio de consumo)

$$p(t) = u(t)i(t) = i(t) * LDi(t) = 2UIsen(wt)\cos(wt) = UIsen(2wt)¿\leq\geq 0?$$

$$i(t) = \sqrt{2}Isen(wt)$$

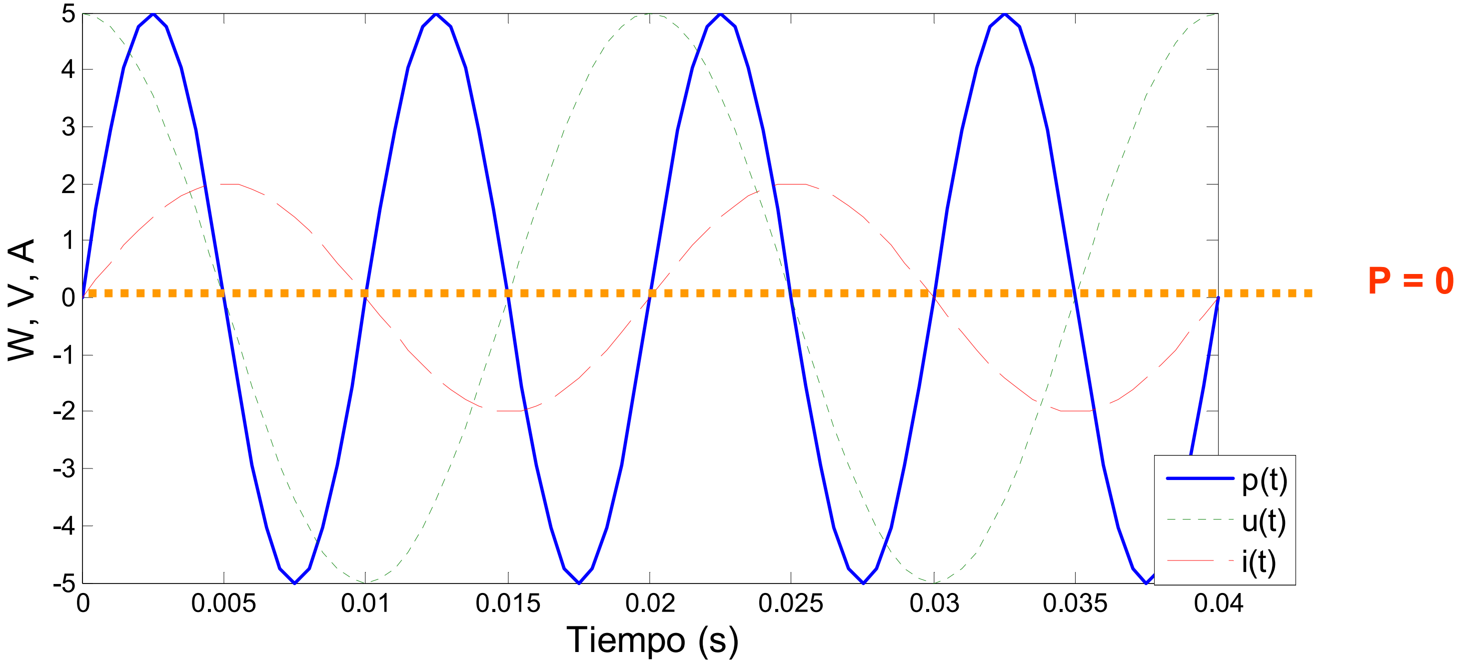
$$u(t) = LDi(t) = \sqrt{2}U\cos(wt)$$



- La potencia p(t) es senoidal pero con 2*w (2*f)

- **En este caso P=0 (el valor medio es nulo)**
  - La amplitud de las oscilaciones de p(t) es wLI^2

$$p(t) = u(t)i(t) = UIsen(2wt) = wLI^2 sen(2wt)$$



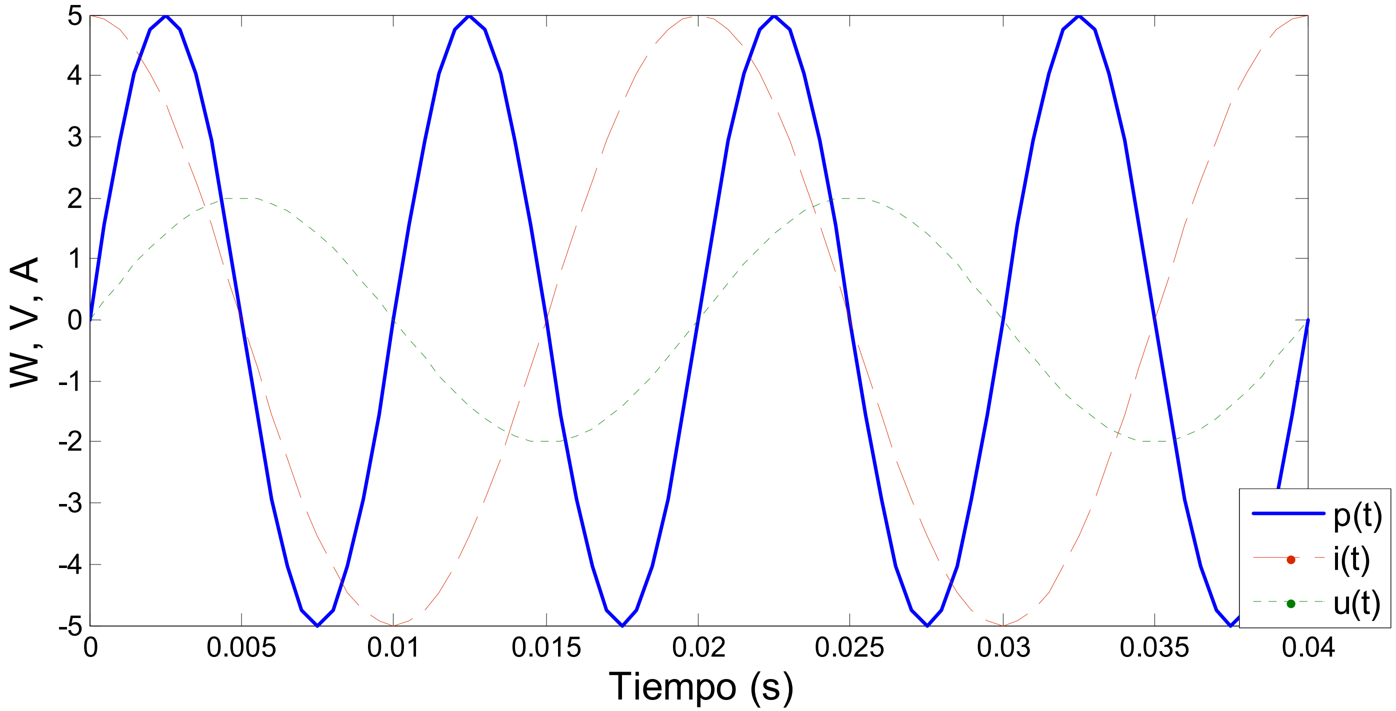
Condensadores

- Potencia instantánea p(t) (criterio de consumo)

$$p(t) = u(t)i(t) = u(t) * CDu(t) = 2UwCUsen(wt)\cos(wt) = 2UIsen(wt)\cos(wt) = UIsen(2wt) ¿\leq\geq 0?$$

$$u(t) = \sqrt{2}Usen(wt)$$

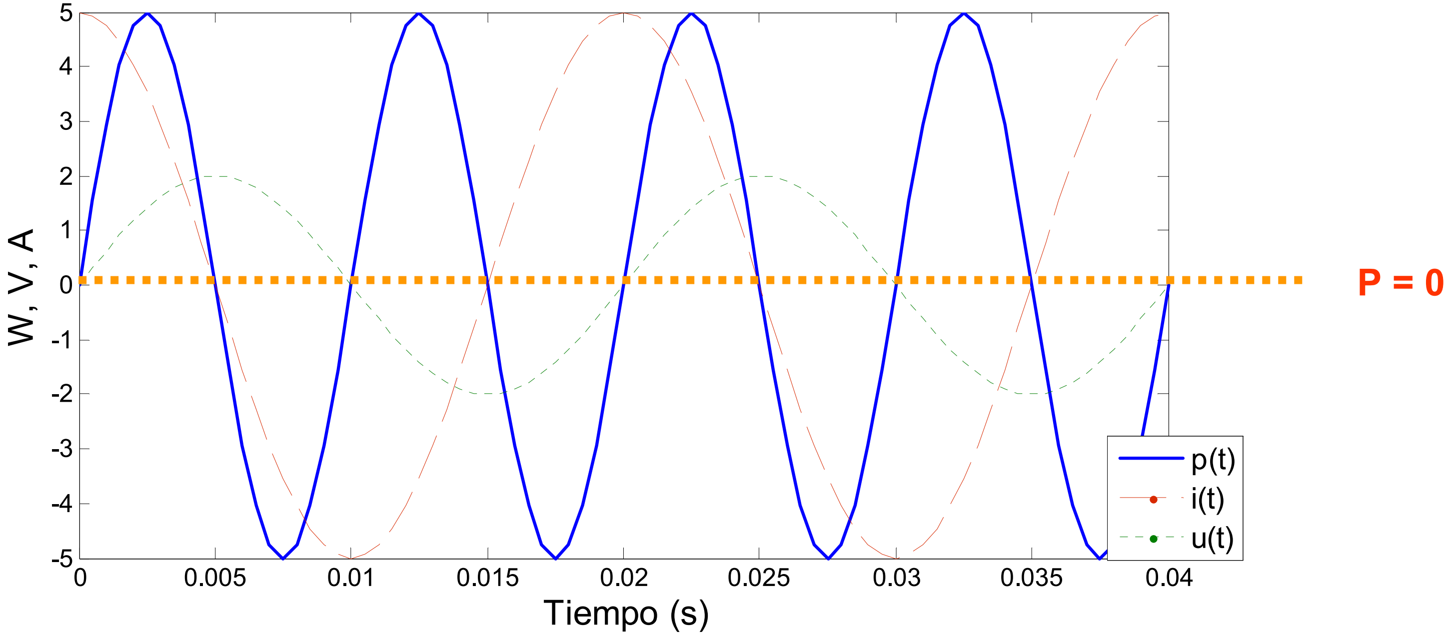
$$i(t) = CDu(t) = \sqrt{2}I\cos(wt) = \sqrt{2}wCU\cos(wt)$$



- La potencia p(t) es de nuevo senoidal con 2*w (2*f)

- **En este caso P=0 (el valor medio es nulo)**
  - La amplitud de las oscilaciones de p(t) es wLI^2

$$p(t) = u(t)i(t) = UIsen(2wt) = wCU^2 sen(2wt)$$



Dipolo pasivo: R+L+C

- La potencia será la suma de cada elemento: una nueva senoide con una constante (debida a la parte resistiva R)
- Pasando al dominio de C, calculamos mejor u(t) e i(t):

$$\overline{Z}(jw) = R + j(wL - \frac{1}{wC}) = Ze^{j\varphi_Z}$$

$$\overline{U} = \overline{Z} * \overline{I} \Rightarrow Ue^{j\varphi_U} = Ze^{j\varphi_Z} * Ie^{j\varphi_I} \Rightarrow Z = \frac{U}{I}; \varphi_z = \varphi_U - \varphi_I$$

Transf.

Inversa

- Recordad fórmulas trigonométricas
  - suma de senos, producto, ángulo doble, mitad, etc..

$$u(t) = \sqrt{2} Usen(wt + \varphi_u)$$

$$i(t) = \sqrt{2} Isen(wt + \varphi_i) = \sqrt{2}\frac{U}{Z}\cos(wt + \varphi_u - \varphi_z)$$

$$p(t) = u(t)i(t) = 2UIsen(wt + \varphi_u)sen(wt + \varphi_i) = UI\left[\cos(\varphi_u - \varphi_i) - \cos(2wt - (\varphi_u - \varphi_i))\right]$$

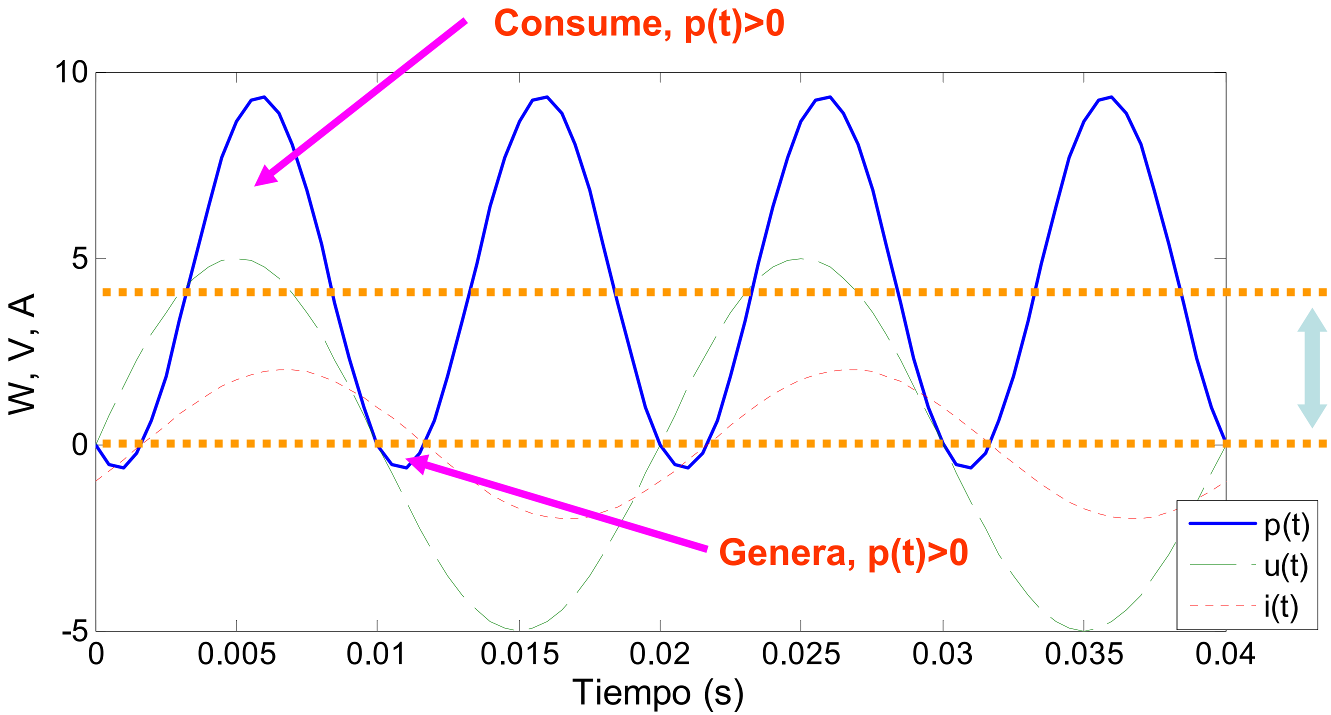
$$p(t) = UI\left[\cos(\varphi_z) - \cos(2wt - (\varphi_z))\right]$$

Potencia en un dipolo (en general)

- Media P y fluctuante

$$p(t) = UI\left[\cos(\varphi_u - \varphi_i) - \cos(2wt - (\varphi_u - \varphi_i))\right]$$

$$p(t) = UI\left[\cos(\varphi_z) - \cos(2wt - (\varphi_z))\right]$$



$$P = UI \times \boxed{\cos(\varphi_z)}$$

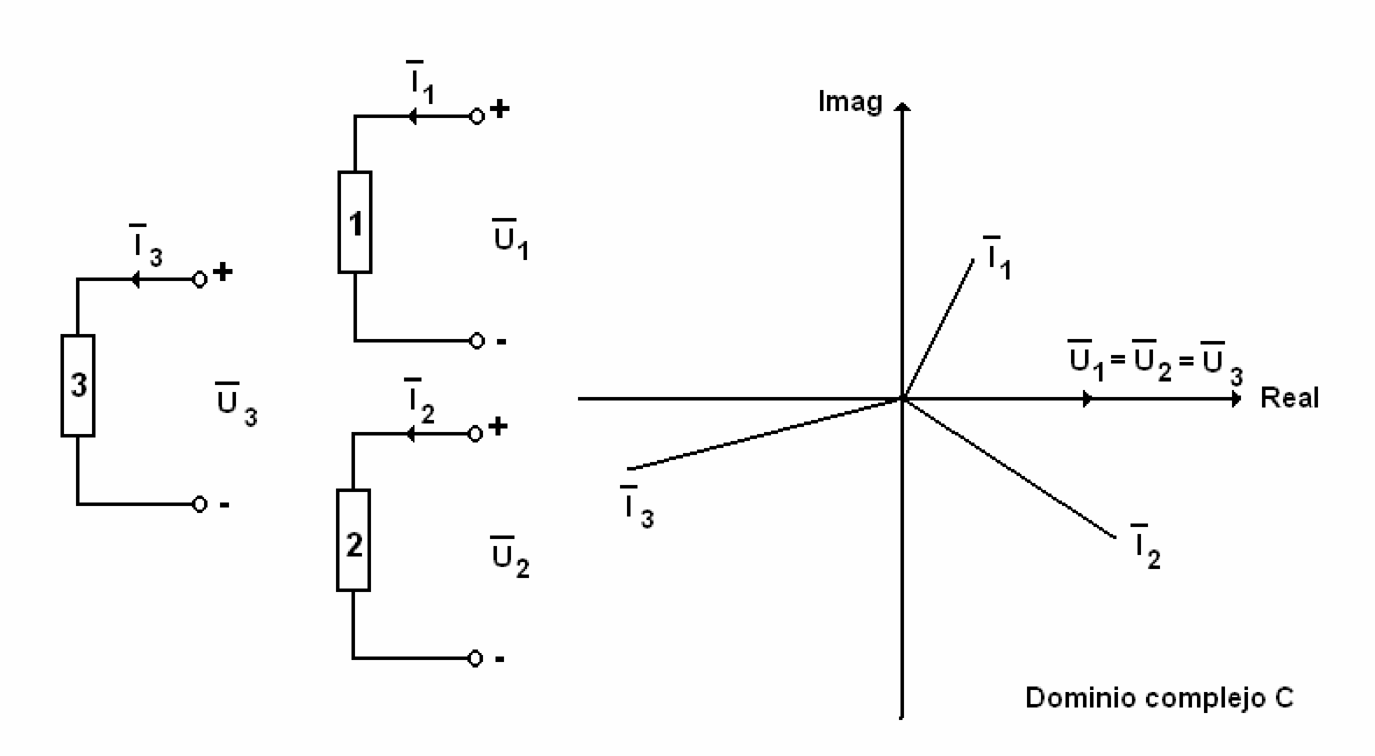
Factor de potencia

Análisis de las potencias en C

- Necesitamos:
  - U, I (o bien Z)
  - Las fases de U, I, Z

  Datos de los vectores parados o en movimiento

- Podemos caracterizar un dipolo por el diagrama vectorial en C (en reposo o en movimiento)



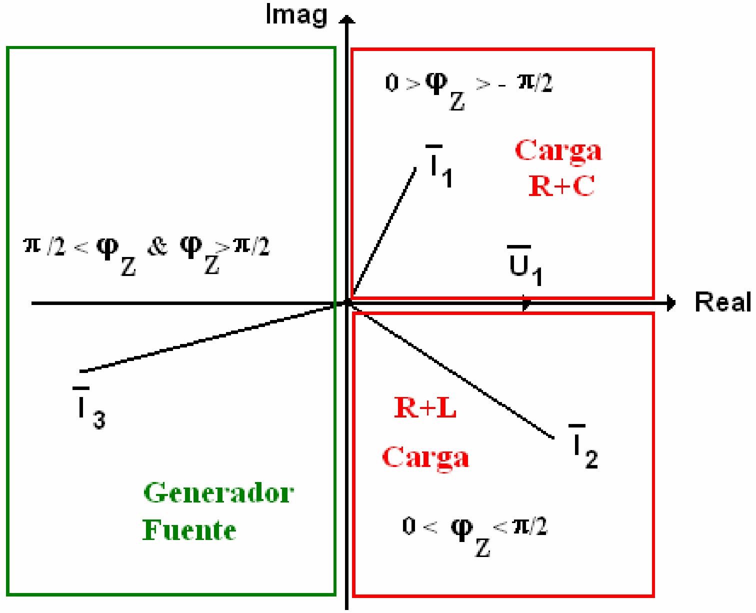
Interpretación de P (ojo con el criterio: consumo)

- Los vectores U e I tienen un desfase entre -90º y 90º
  - El elemento es pasivo: carga

$$\cos(\varphi_z) = \cos(\varphi_U - \varphi_I) \geq 0 \Rightarrow$$
$$P = UI\left[\cos(\varphi_z)\right] \geq 0$$

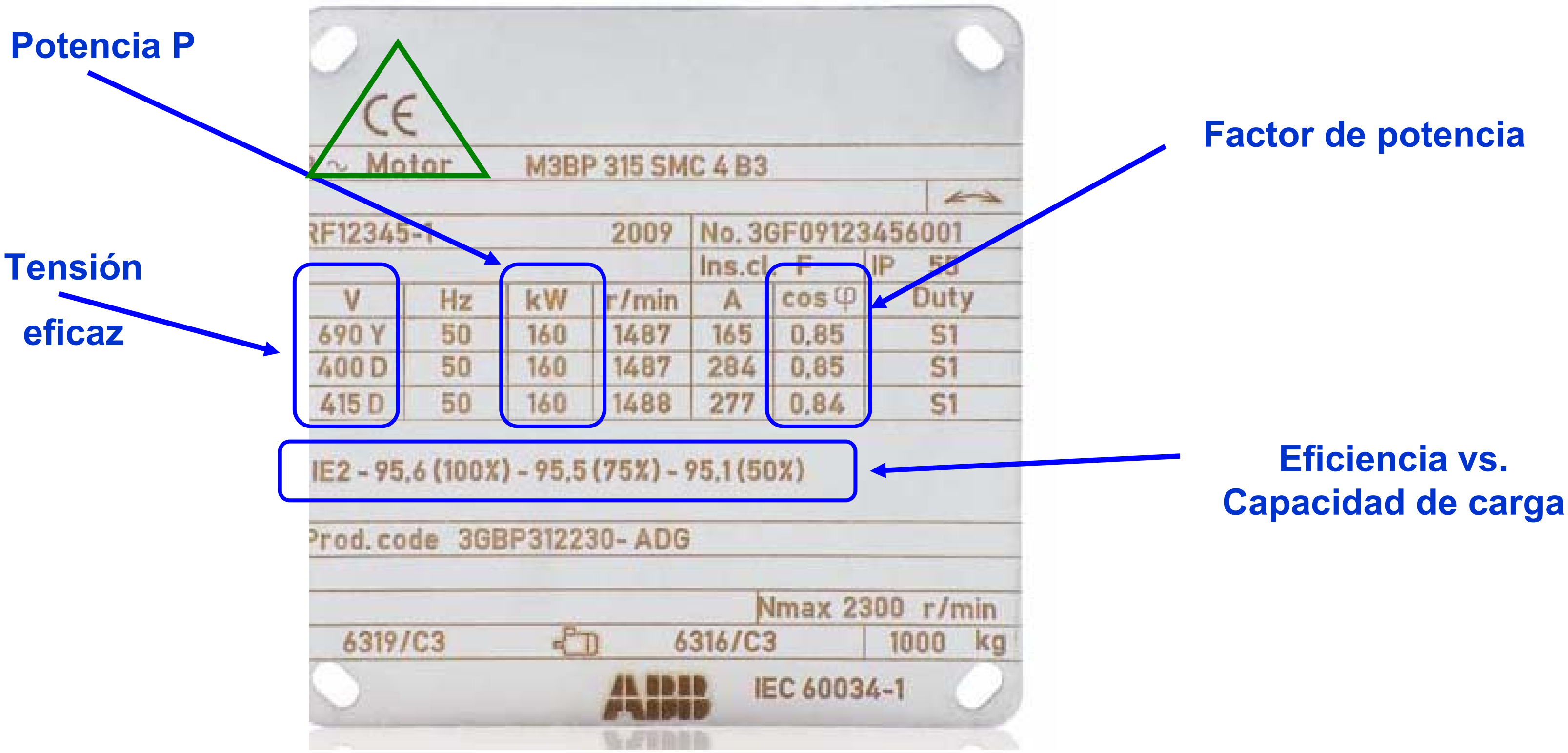
- Los vectores U e I tienen un desfase entre 90º y 270º
  - El elemento es activo: generador (fuente)

$$\cos(\varphi_U - \varphi_I) \leq 0 \Rightarrow$$
$$P = UI\left[\cos(\varphi_U - \varphi_I)\right] \leq 0$$



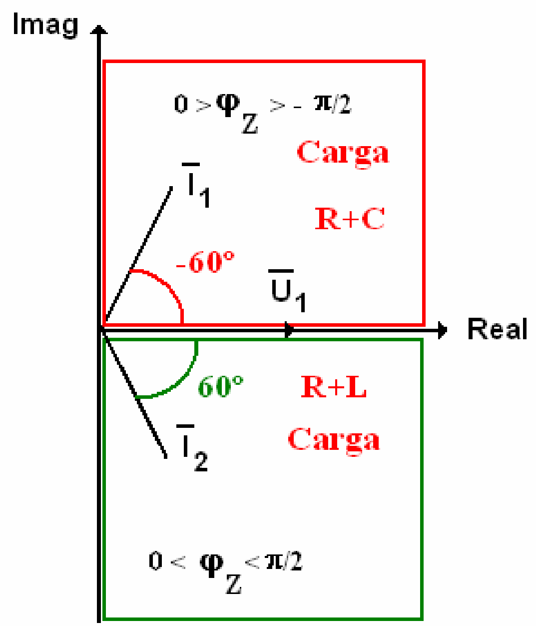
Consideraciones sobre el factor de potencia: cosφ

- En las cargas (dipolos) podemos encontrar una placa de características (normalizada IEC 60034) como la siguiente (figure source: ABB motors). Dicha placa contiene información básica del dispositivo es:
  - Tensión, potencia activa, intensidad, eficiencia y cosφ
  - Y otros valores que veremos en la lección 10



Consideraciones sobre el factor de potencia

- ¿Cómo distinguimos una carga R+L de otra R+C, si tienen el mismo factor de potencia?



- Por un subíndice, i vs c:
  - cos (60) ►0.5i (si es inductivo el dipolo, y el ángulo es +)
  - cos (-60) ► 0.5c (si es capacitivo el dipolo y el ángulo es -)

Potencia reactiva (Q)

- ¿Qué podemos obtener en el dominio temporal y complejo?

$$p(t);\ P=\frac{1}{T}\int_{a}^{a+T} p(t)\,dt$$

$$P=UI\cos(\varphi_Z)$$

$$P=UI\cos(\varphi_Z)$$

Tiempo — **Frecuencia compleja**

- ¿Qué es el producto de tensión por intensidad en C? Nada

$$\overline{U}\times\overline{I}=Ue^{j\varphi_U}\times Ie^{j\varphi_I}=UIe^{j(\varphi_U+\varphi_I)}=UI\cos(\varphi_U+\varphi_I)+jUIsen(\varphi_U+\varphi_I)=¿?$$

$$\hat{U}\times\hat{I}=\sqrt{2}Ue^{j(wt+\varphi_U)}\times\sqrt{2}Ie^{j(wt+\varphi_I)}=2UIe^{j(2wt+\varphi_U+\varphi_I)}\Rightarrow \mathrm{Re}\{\}\Rightarrow 2UI\cos(2wt+\varphi_U+\varphi_I)$$

- ¿Podemos obtener P multiplicando vectores? Si

$$\overline{U}\times(\overline{I})^{*}=Ue^{j\varphi_U}*Ie^{-j\varphi_I}=UIe^{j(\varphi_U-\varphi_I)}=UI\cos(\varphi_U-\varphi_I)+jUIsen(\varphi_U-\varphi_I)=P+j¿?$$

  - Parte real: P
  - Parte imaginaria: definimos Q (“potencia” reactiva, unidades VAr)

Potencia aparente (S) y aparente compleja

- Potencia aparente: módulo de nuestro producto de tensión por intensidad conjugada (unidades VA)
- Potencia aparente compleja: el producto de U por I* (unidades VA)

$$\overline{S} = \overline{U} \times (\overline{I})^{*} = UIe^{j(\varphi_U - \varphi_I)} = UI\cos(\varphi_U - \varphi_I) + jUIsen(\varphi_U - \varphi_I) = P + jQ$$

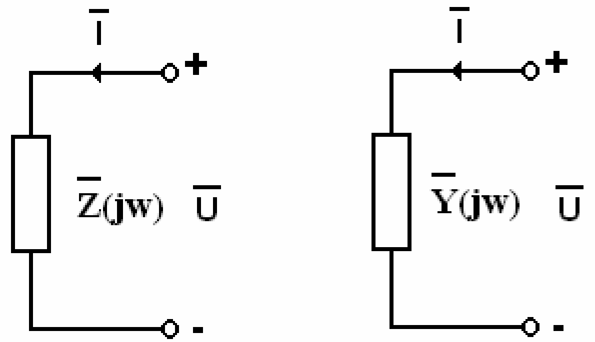
$$S = U \times I (VA)$$

- Físicamente: sólo tiene sentido P (es la potencia que existe en el dominio del tiempo). Se mide en W (¡cómo no!)
  - Puede transformarse en luz, calor, energía mecánica, química,…
- Matemáticamente: existen dos "residuos" al obtener P en el dominio complejo (frecuencia compleja)
  - S: "aparentemente" es una potencia (U*I)
  - Q: también tiene unidades de potencia en C, pero no se convierte en nada (calor, luz,…)
  - Q nos permite obtener el factor de potencia

$$\cos\varphi_z = \frac{P}{\sqrt{R^2 + X^2}} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$$

Otras expresiones de S, P y Q

- Conocida la impedancia Z del elemento R+jX



$$\overline{S} = \overline{U} \times (\overline{I})^* = \overline{Z} \times \overline{I} \times (\overline{I})^* = \boxed{\overline{Z} \times I^2} = RI^2 + jXI^2 = P + jQ$$

$$\boxed{P = RI^2 (W); Q = XI^2 (VAr)}$$

- Conocida la admitancia Y del elemento G+jB

$$\overline{S} = \overline{U} \times (\overline{I})^* = \overline{U} \times (\overline{Y} \times \overline{U})^* = \boxed{\overline{Y}^* \times U^2} = GU^2 - jBU^2 = P + jQ$$

$$\boxed{P = GU^2 (W); Q = -BU^2 (VAr)}$$

Teorema de Boucherot

- Para una frecuencia constante existe conservación de potencia activa (P) y de potencia reactiva (Q) independientemente
- Hipótesis: se cumple el teorema de Tellegen
  - $\bar{U}_r$ cumple la 1ª LK en los nudos
  - $\bar{I}^*_r$ (conjugadas) no es la solución pero cumple 2ªLK
- Según Tellegen:

$$\sum_{k=1}^{r} u_k \times i_k = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{r} \overline{U}_k \times \overline{I}^*_k = \sum_{k=1}^{r} \overline{S_k} = \sum_{k=1}^{r} (P_k + jQ_k) = 0$$

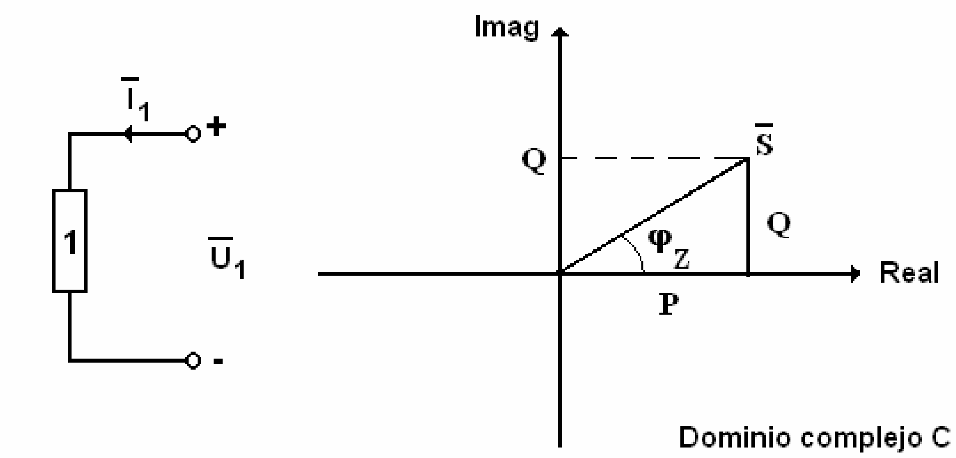
  - Si un número complejo es cero, sus partes reales e imaginarias son cero:

$$\sum_{k=1}^{r} P_k = 0; \sum_{k=1}^{r} Q_k = 0$$

  - La conservación de P no es sorprendente: es el valor de la energía (es aplicable ppo. Conservación de energía)
  - La conservación de Q si sorprende: Q no es nada físicamente

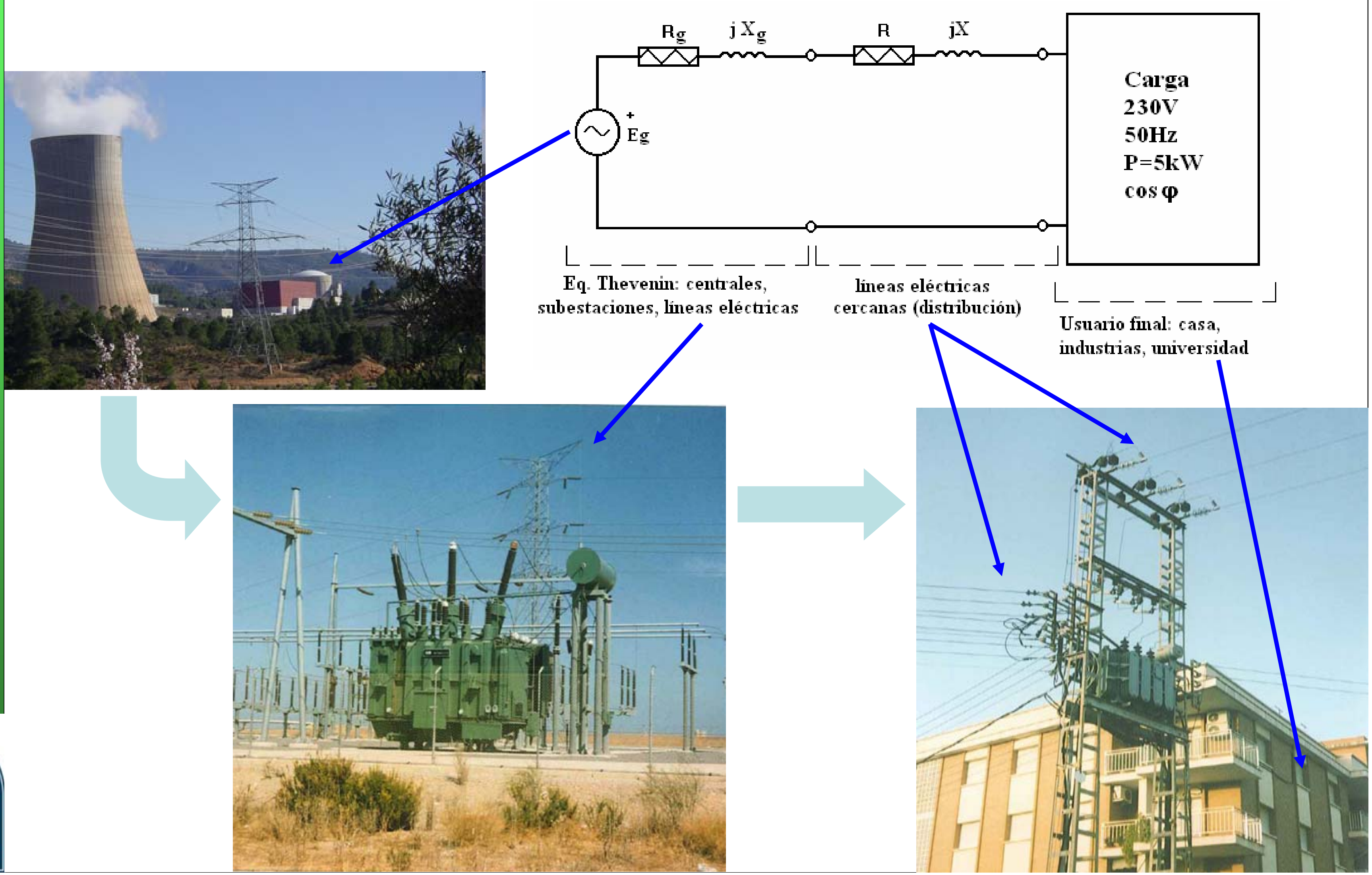
Triángulo de potencias: S, P y Q

- La potencia S puede expresarse en función de sus partes reales (P) e imaginaria (Q) en un gráfico en el dominio C.
- Recuerda:
  - La potencia aparente compleja S no es un vector giratorio (igual que las impedancias o admitancias)
  - Se puede sumar como complejo, como parte real (P) o como parte imaginaria.



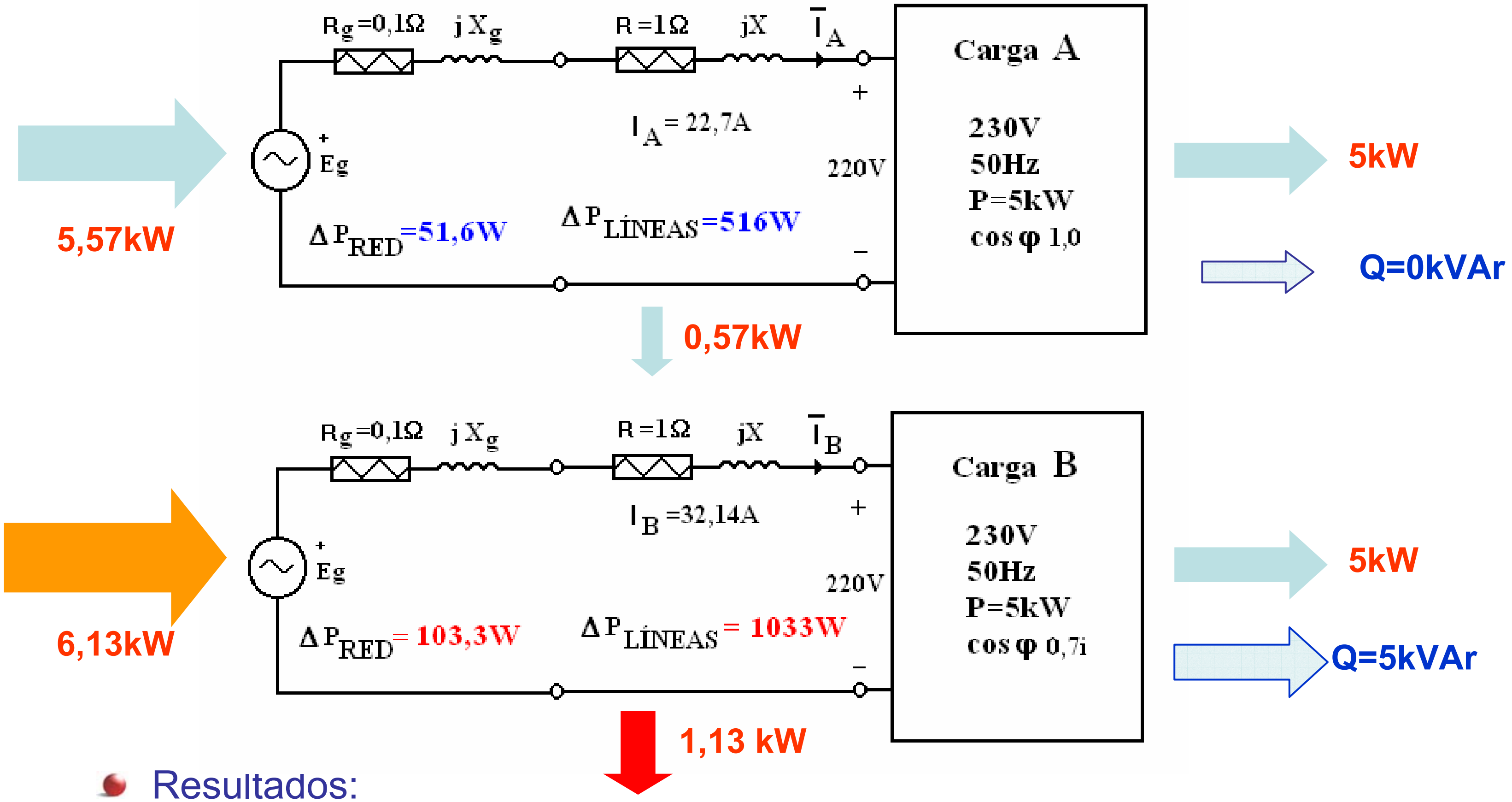
Importancia práctica del factor de potencia

- Consideremos el esquema de un consumidor (nuestra casa) conectada a la red eléctrica (**figure source Cofrentes power plant: CSN, España).**



Importancia práctica del factor de potencia (II)

- Calculemos las intensidades de dos usuarios A y B:
  - A: con FP=1,0; B con FP=0,7i



- Resultados:
  - El **doble de pérdidas eléctricas** en líneas, generadores con igual servicio (5kW útiles en casa), mayor necesidad de generación (emisiones!!!)
  - Mayor utilización de las líneas y transformadores (I_B=1,41 veces I_A)
  - La “potencia Q” nos indica lo malo (<1) o bueno (1) que es cosφ

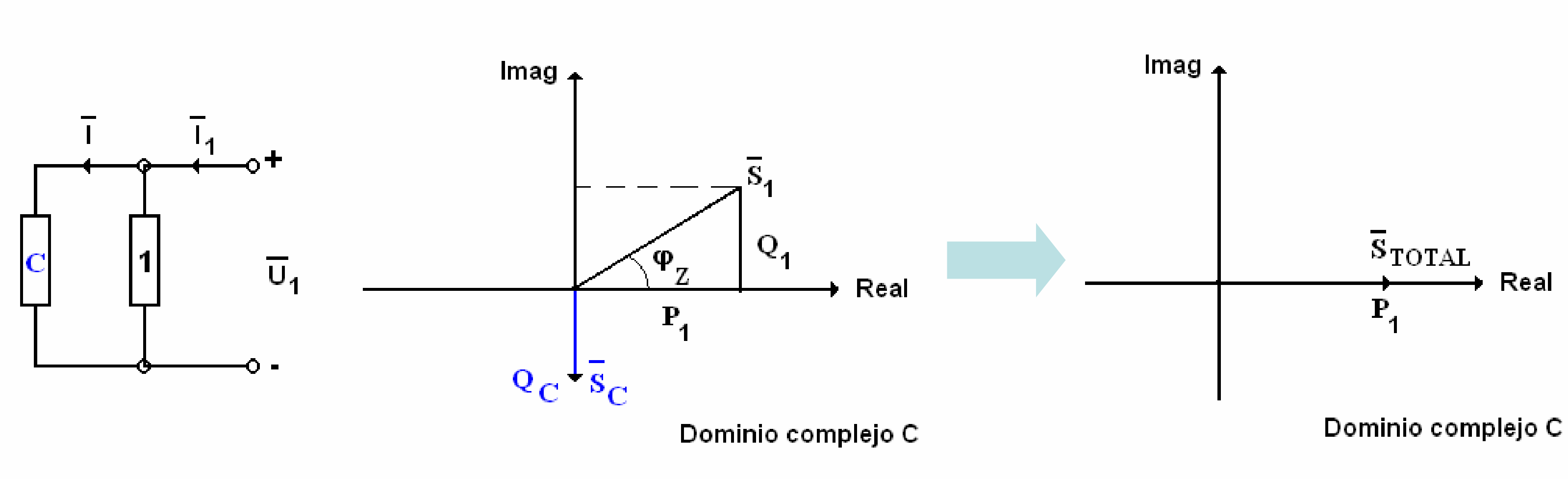
¿Se puede corregir el factor de potencia?

- ¿Aumentando R? ► Aumentamos P ► NO: coste económico cte.
- ¿Reduciendo X? Si, es posible.
  - Condensadores: X (-1/wC) < 0. Y no consumen P (o casi nada).
  - Q de un condensador:

$$Q = -BU^2 = -wCU^2$$

  - Conexión: en paralelo (para no reducir la tensión de nuestra carga)

$$\overline{S}_{TOTAL} = \overline{S}_1 + \overline{S}_C = (P_1 + jQ_1) - (jQ_C)$$



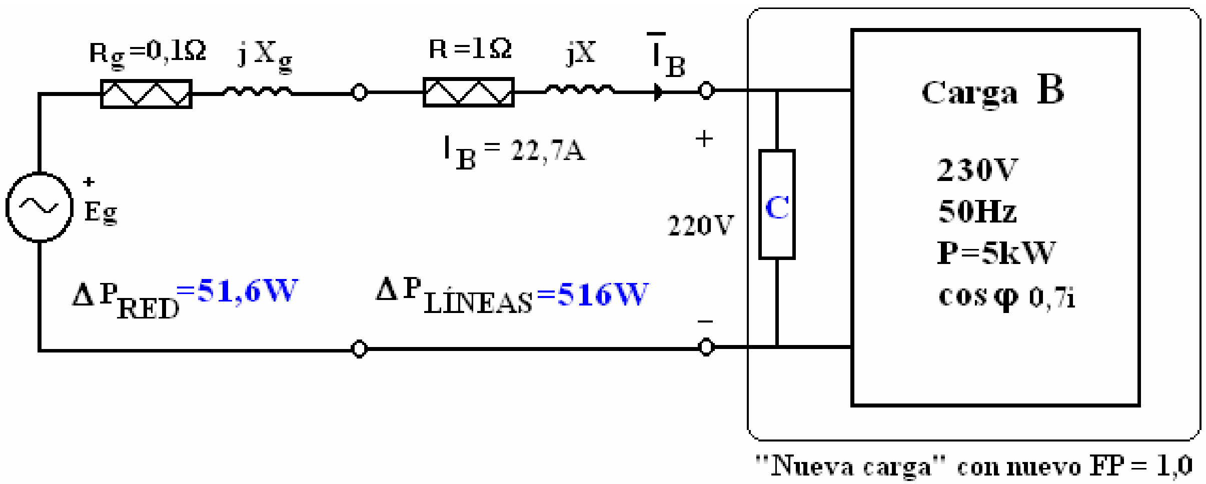
- **También existen razones económicas para corregir el factor de potencia**
  - Las tarifas eléctricas:
    - No hay descuentos para un buen FP (próximo a 1)
    - Pero si más recargos a los malos FP

	Precio (€/kVarh)		
cosφ	**2009**	**2010**	**? 2009-10**
> 0,95	0	0	=
0,9< < 0,95	0,000013	0,041554	320%
0,85< < 0,9	0,01702	0,041554	144%
0,8< < 0,85	0,03404	0,041554	22%
< 0,80	0,05106	0,06233	22%

- **Condensadores (figure source: ABB)**
  - Fijos o variables (llamados “baterías de condensadores”)

Corrección máxima del FP para "nuestro" usuario B

- Usuario B: P = 5kW; Q = 5kVAr
- Condensador C = -5kVAr
  - Obtenemos reducciones de las pérdidas de potencia.



- Nuestro condensador será de 230V, y capacidad:

$$Q_C = -5000VAr = -BU^2 = -wCU^2 \Rightarrow C = \frac{5000}{(2\pi 50)(230^2)} = 300\mu F$$