E.T.S. de Ingeniería Industrial

Universidad Politécnica de Cartagena

Curso Académico 2011/12

“Análisis de Circuitos”

Tema II. Métodos y herramientas del análisis de circuitos

Profesor: Dr. Antonio Gabaldón

Dpto de Ingeniería Eléctrica. E-mail: antonio.gabaldon@ upct.es

Objetivos

- Seleccionar las ecuaciones linealmente independientes que pueden formularse en un circuito eléctrico.
- Reducir al máximo el orden de estos sistemas de ecuaciones.
- Seleccionar el método de análisis más adecuado: mallas/nudos.
- Aplicar los teoremas fundamentales de los circuitos:
  - Conocer las hipótesis de partida.
  - Utilidad práctica para simplificar el estudio de los circuitos.

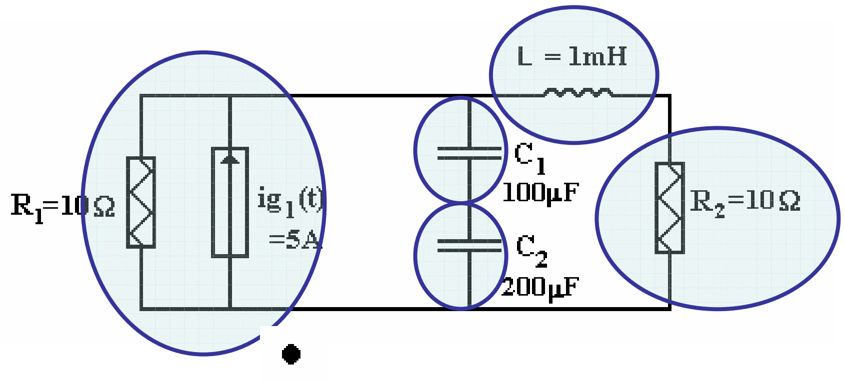
Resultados del aprendizaje:

- R2) Seleccionar las ecuaciones linealmente independientes que se pueden formular en un circuito eléctrico. Conocer y aplicar diversas técnicas de análisis de circuitos que permiten reducir el orden de estos sistemas de ecuaciones. Seleccionar el método de análisis más adecuado para reducir el orden de complejidad del sistema a resolver.
- R4) Identificar las hipótesis de los teoremas fundamentales de los circuitos e ilustrar algunas de sus aplicaciones prácticas. Precisar la validez de cada teorema, y determinar su potencial aplicación según el problema objeto de estudio.

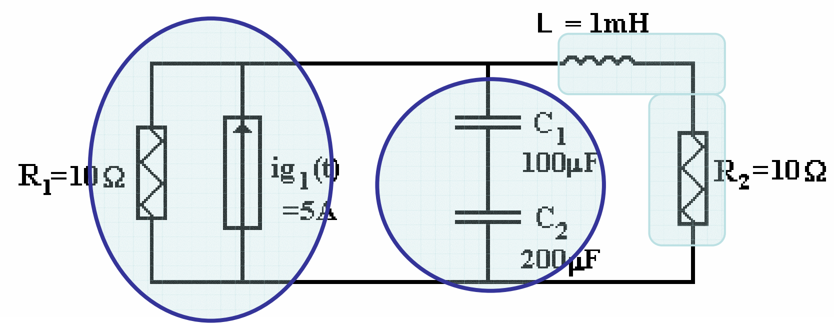
- **Lección 3**
  - Formulación y selección de ecuaciones

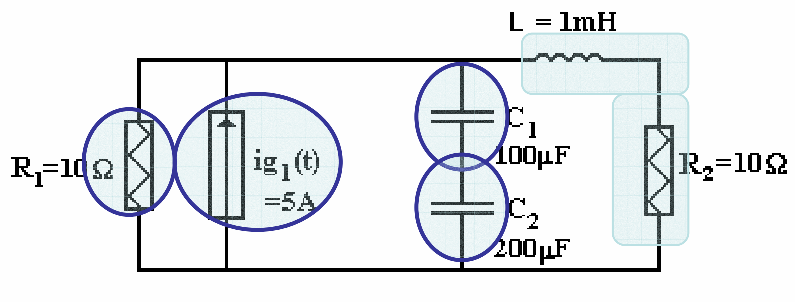
Rama:

- Dipolo o agrupación de dipolos, con dos terminales, a los que puede aplicarse una relación u=f(i), i=g(u).
- La definición de ramas no es única, depende del "usuario"



- Algunas opciones de ramas: <u>llamaremos "r" al nº de ramas</u>



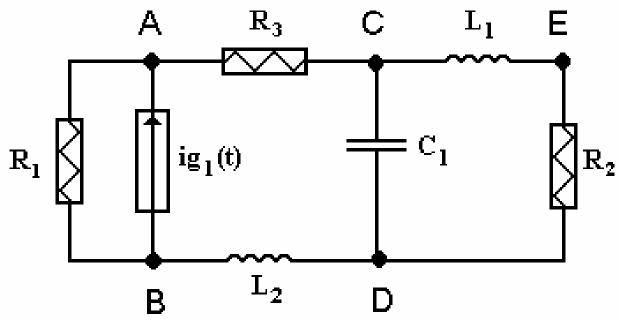


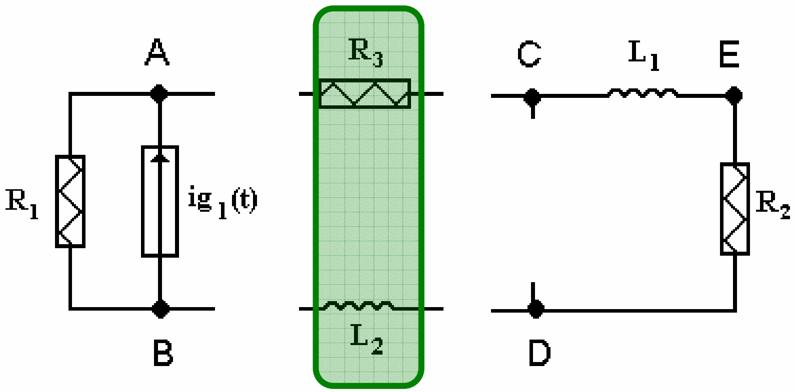
- Menos ramas ► menos ecuaciones a formular
  - Ojo: no compliquemos demasiado las reducciones

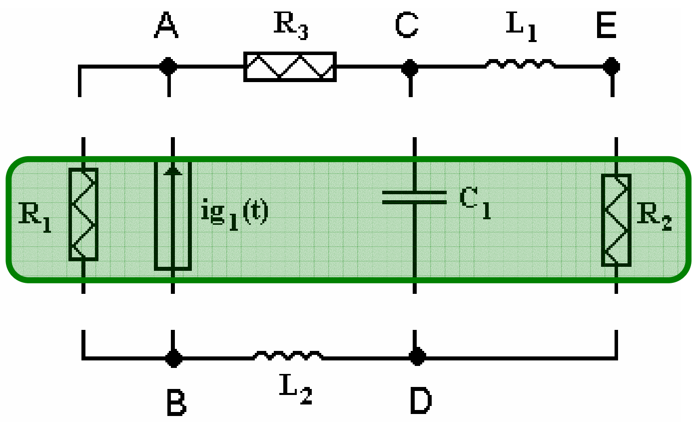
- **Nudos (ya visto, Tema I)**
  - Punto de unión de dos o más ramas.
  - Los representamos por un punto y una letra mayúscula.
  - El número de nudos se denomina “n”
- **Lazos (ya visto, Tema I)**
  - Conjunto de ramas que forma una línea cerrada.
  - El número de lazos se denomina “l”

Grupo de corte

- Conjunto de ramas al que puede aplicarse la 1ª LK de forma generalizada (superficie cerrada).
  - Si suprimimos las ramas el circuito queda dividido en dos o más partes.
- Ejemplo: cada dipolo ideal una rama



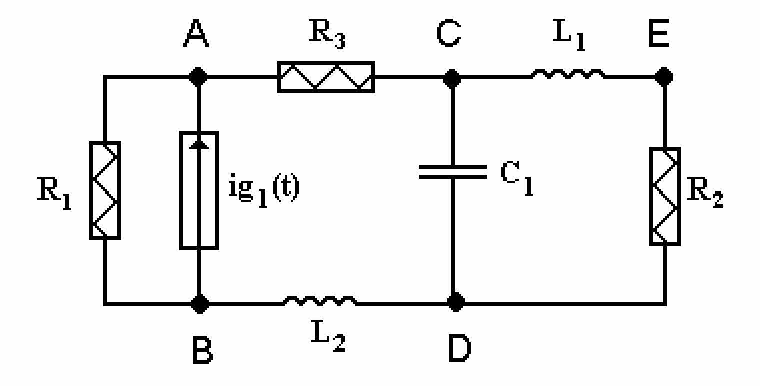




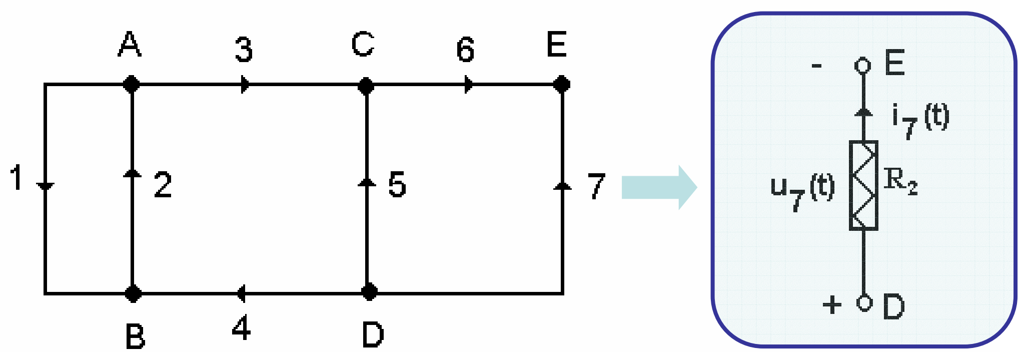
- Nudos A, B, C, D y E: sus ramas son un caso particular de grupo de corte (el circuito sólo se divide en dos partes)

Grafo reticular

- Sustituimos cada rama por un segmento orientado. La orientación del segmento nos da el sentido de u(t) e i(t).
- No hay criterio para definir el sentido (“Ley de Murphy”).
- Circuito

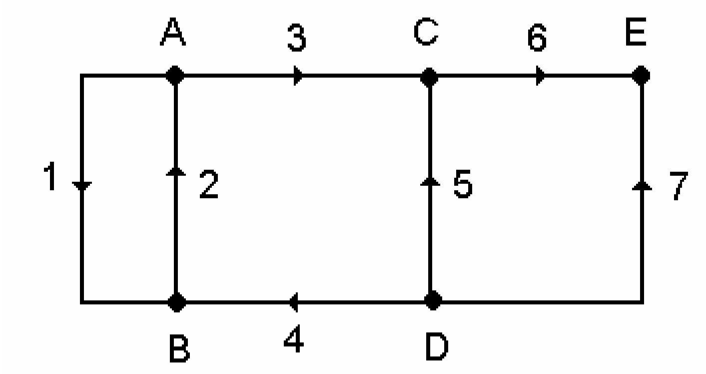


- … y su grafo (con explicación del segmento para la rama 7)

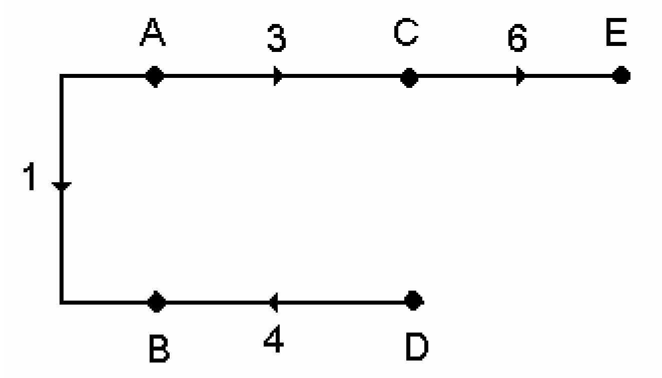


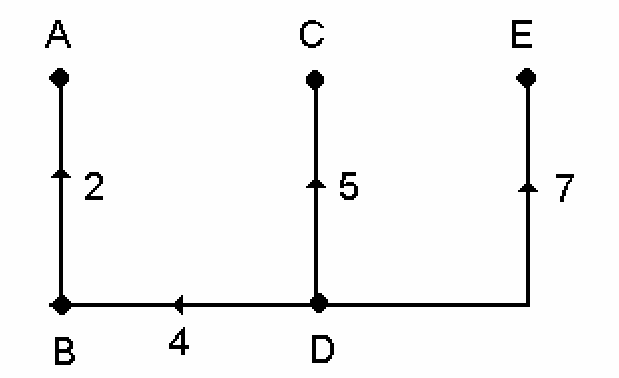
Árbol

- Conjunto de ramas conexo, pero abierto, que contiene todos los nudos.
- El número de ramas de un árbol es (n-1).



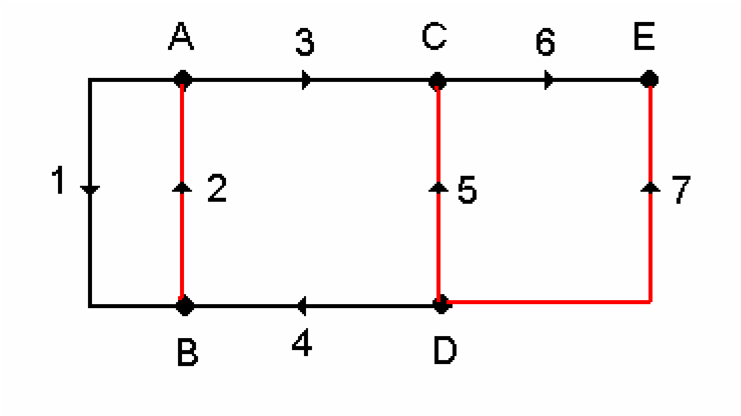
- Ejemplo de árboles en nuestro circuito (n-1 = 5-1 ramas)
  - Árbol 1 ≡ {1, 3, 4, 6}
  - Árbol 2 ≡ {2, 4, 5, 7}





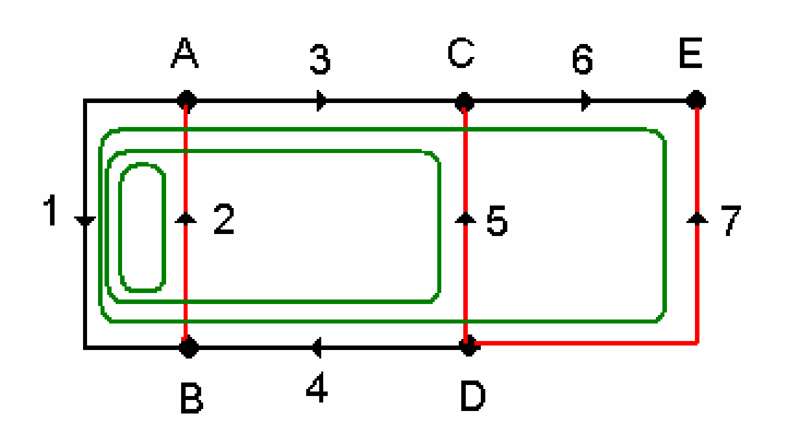
Eslabones

- Definido un árbol, son las ramas que no pertenecen a él.
- Su número es: e = r – (n -1).
- Ejemplo: si tomamos como árbol {1, 3, 4, 6}



Lazo básico

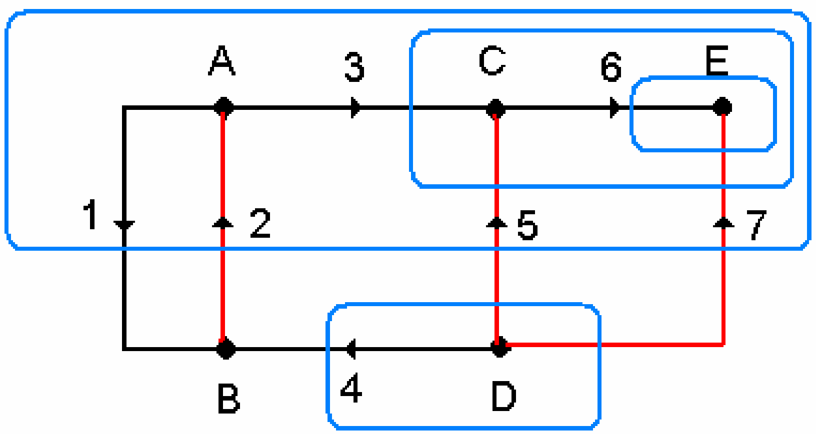
- Lazo que sólo contiene un eslabón. Es un conjunto más pequeño que los lazos.
- El número de lazos básicos es: r – (n-1)



- Ejemplo
  - {1, 2, }
  - {1, 3, 4, 5}
  - {4, 5, 7}
  - {1, 3, 4, 6, 7}

Grupo de corte básico (gcb)

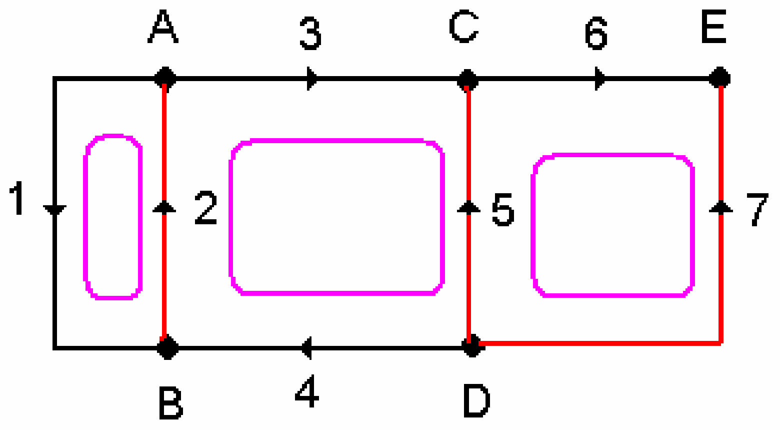
- Grupo de corte que sólo contiene una rama del árbol. Es un conjunto más pequeño que los nudos o los grupos de corte en general.
- El número de gc básicos es: (n-1)



- Ejemplo
  - {1, 2, 5, 7}
  - {3, 5, 7}
  - {4, 5, 7}
  - {6, 7}
- No todos los nudos son gcb, pero no es mala idea empezar por ellos para determinar los gcb.

Mallas

- Lazo que no contiene ningún otro. Es un conjunto más pequeño que los lazos.
- El número de mallas es r - (n-1) (¡Igual al de lazos básicos!!!)



- Ejemplo
  - {1, 2}
  - {2, 3, 4, 5}
  - {5, 6, 7}
- Algunos lazos básicos pueden coincidir con mallas

- **¿Cuántas ecuaciones podemos formular?**
  - Topológicamente: depende de la conexión entre ramas, no de qué haya en ellas.
    - Ecuaciones de lazos: l
    - Ecuaciones de lazos básicos: r – (n-1)
    - Ecuaciones de nudos: n
    - Ecuaciones de grupos de corte: n-1

    Al menos r + 1
  - Ramas: ecuaciones de definición de dipolos o conjuntos de dipolos
    - Ecuaciones de ramas: r
- **¿Incógnitas? Pensemos en dipolos pasivos (R, L, C)**
    - u(t) e i(t) en cada rama: 2r
- **Conclusión: Nº ecuaciones > Nº de incógnitas ►**
  - Dependencia lineal de ecuaciones (“sobran”)
    - O bien …
  - No existe solución: (los circuitos suelen funcionar…)

- **En la selección de ec. debemos tener claro que:**
  - Ecuaciones 1ªLK son independientes de la 2ª LK
    - Utilizamos variables distintas, u(t) o i(t)

$$i_1 - i_2 + i_6 = 0$$
$$u_2 + u_4 + u_6 = 0$$

  - Las ecuaciones de las LK son independientes de las ecuaciones de definición (modelos) de cada rama o dipolo

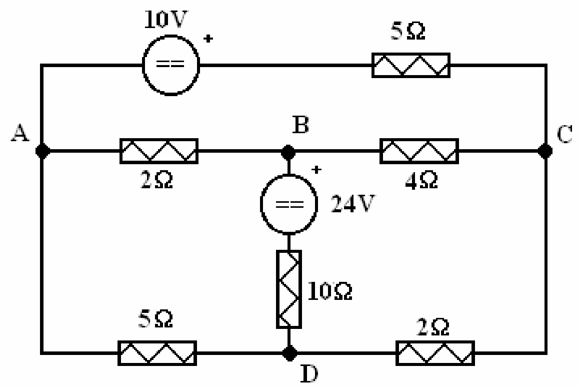
$$u_1(t) = (R_1 + L_1 D) i_1(t)$$

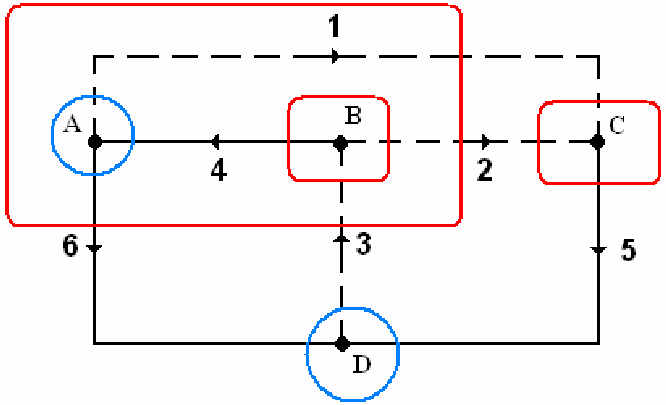
  - Las ecuaciones de cada rama son independientes entre si … salvo que creamos en la astrología ► “r” ecuaciones independientes
    - El comportamiento de una rama nada tiene que ver con el de otra (en los acoplamientos si, pero existe una parte propia de cada elemento, L)

$$u_1(t) = (R_1 + L_1 D) i_1(t)$$
$$u_2(t) = (R_2 + \frac{1}{C_2 D}) i_2(t)$$

  - Por tanto seleccionaremos ecuaciones entre la 1ª LK y la 2ªLK

Ejemplo: ecuaciones de la 1ª LK





Nudos

$$\left.\begin{aligned} A &\Rightarrow i_1 - i_4 + i_6 = 0 \\ B &\Rightarrow i_2 - i_3 - i_4 = 0 \\ C &\Rightarrow -i_1 - i_2 + i_5 = 0 \\ D &\Rightarrow i_3 - i_5 - i_6 = 0 \end{aligned}\right\}$$

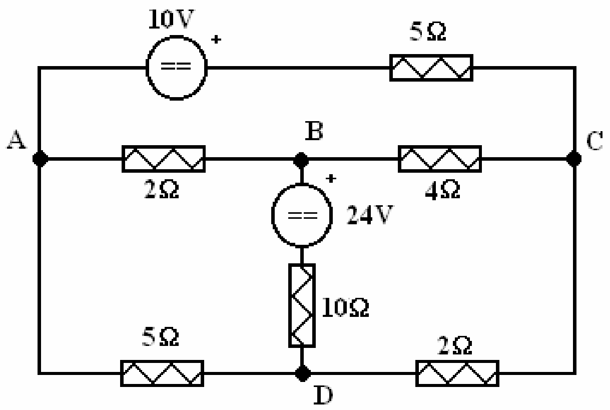
A+B+C+D=0 ► D = -(A+B+C)

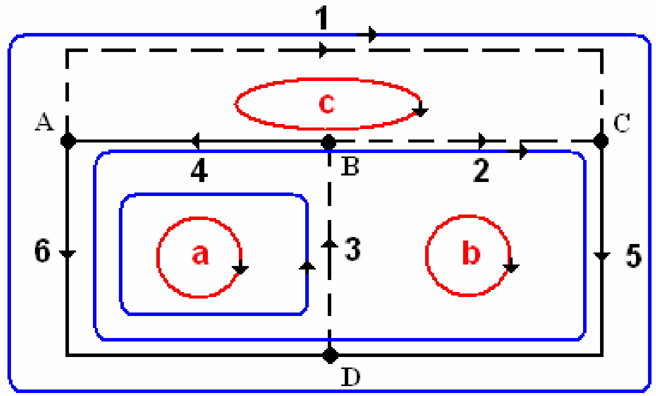
GCB

$$\left.\begin{aligned} B &\Rightarrow i_2 - i_3 + i_4 = 0 \\ C &\Rightarrow -i_1 - i_2 + i_5 = 0 \\ gcb - rama6 &\Rightarrow i_1 + i_2 - i_3 + i_6 = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo: ecuaciones de la 2ª LK





Mallas

$$\left.\begin{aligned} a &\Rightarrow -u_3 - u_4 - u_6 = 0 \\ b &\Rightarrow +u_2 + u_3 + u_5 = 0 \\ c &\Rightarrow +u_1 - u_2 + u_4 = 0 \end{aligned}\right\}$$

Ec lazo = f (ec. mallas contenidas en él)

Ej. Lazo rama 2 = (malla a) + (malla b)

Lazos básicos

$$\left.\begin{aligned} lb - rama1 &\Rightarrow u_1 + u_5 - u_6 = 0 \\ lb - rama2 &\Rightarrow u_2 - u_4 + u_5 - u_6 = 0 \\ lb - rama3 &\Rightarrow u_3 + u_4 + u_6 = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Conjunto de ecuaciones en global

$$
\begin{matrix} \\ \text{1ªLK gcb} \\ \\ \\ \text{2ªLK lb} \\ \\ \\ \\ \text{Ec Def} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}
\begin{cases} \\ \\ \\ \end{cases}
\left[\begin{array}{cccccc:cccccc}
0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hdashline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
\hdashline
-5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
*
\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \\ 0 \\ -24 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

- Resultado:
  - $(i_{rama}) = (1{,}51 \quad 0{,}24 \quad 1{,}95 \quad 1{,}71 \quad 1{,}75 \quad 0{,}21)^t$
  - $(u_{rama}) = (-2{,}46 \quad 0{,}96 \quad -4{,}46 \quad 3{,}43 \quad 3{,}50 \quad 1{,}03)^t$

Resumen

- Escribimos (n-1) ecuaciones de la 1ª LK.
  - Usando todos los nudos -1 ► método de nudos.
    - O bien
  - Usando todos los grupos de corte básicos.
- Escribimos r – (n-1) ecuaciones de la 2ª LK
  - Usando todos los nudos -1 ► método de nudos.
    - O bien
  - Usando todos los grupos de corte básicos.
- Escribimos las r ecuaciones de rama

Total:

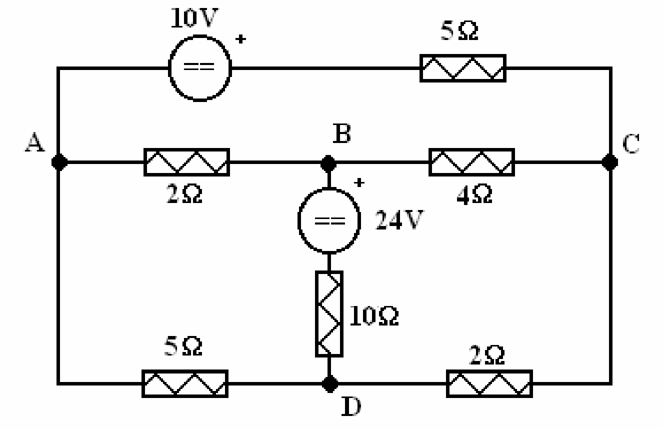
- Ecuaciones: (n-1) + (r- (n-1))+r = 2r
- Incógnitas: 2r

Nota: ¿Y si la rama es una fuente ideal?

- Perdemos una variable (u,i) en la ecuación de rama
- Perdemos una incógnita (el valor de la fuente: u, i)

- **Lección 4**
  - Métodos de análisis circulares: mallas

- **¿Es sencillo este sistema de 12x12 para ese circuito? NO**

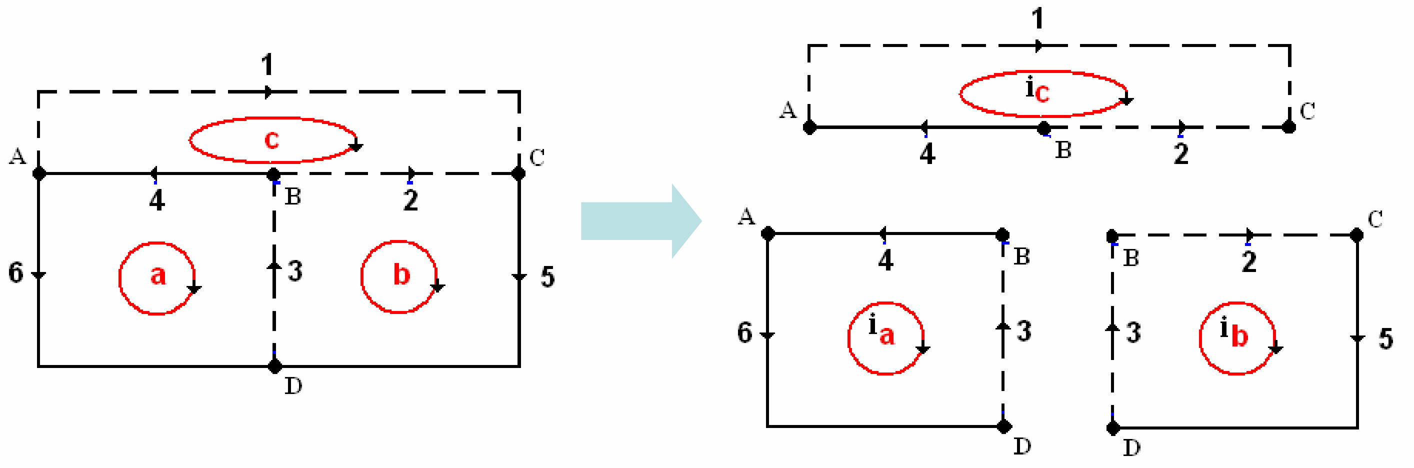


$$
\begin{array}{l}
\\
\text{1ªLK gcb} \\
\\
\\
\text{2ªLK Ib} \\
\\
\\
\\
\\
\text{Ec Def} \\
\\
\\
\end{array}
\left[\begin{array}{cccccc:cccccc}
0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hdashline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
\hdashline
-5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
*
\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \\ 0 \\ -24 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

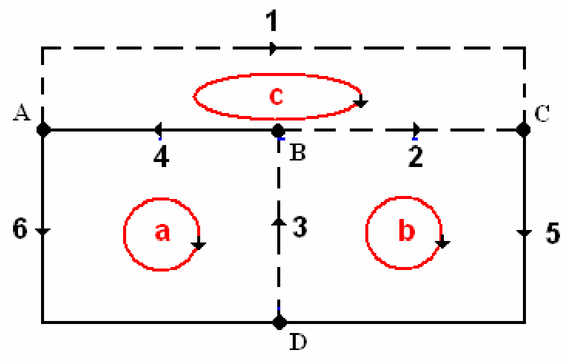
- **Fundamentos del método de mallas**
  - El método de lazos básicos es similar
  - 1) Seleccionamos unas variables ficticias ► (i_m): i de malla
  - Propiedades:
    - Las verdaderas incógnitas se pueden calcular a partir de ellas:

$$(i_r) = f(i_m)$$

    - Reducen el número de ecuaciones a plantear:
      - La 1ª LK a los gcb o nudos (menos 1) son innecesarias.
    - Son ficticias: no existe tal intensidad en el circuito
  - 2) Planteamos las ecuaciones de la 2ªLK en las mallas.
  - 3) Sustituimos las ec de rama en la 2ª LK, utilizando (i_m)
- **Ejemplos de intensidades de malla**



- **Veamos si se cumplen las propiedades:**
  - Las verdaderas incógnitas se pueden calcular a partir de ellas:√

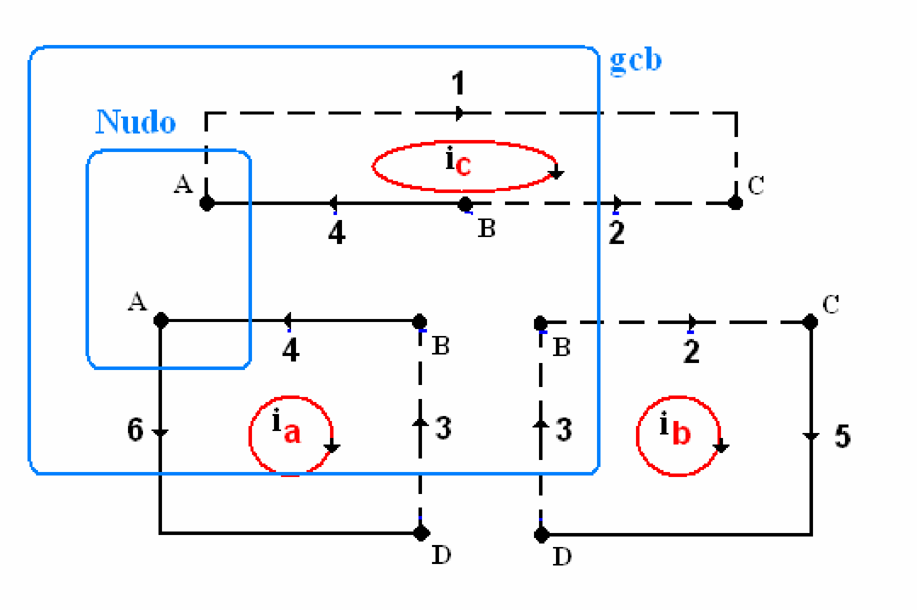


$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{pmatrix}$$

  - La matriz de coeficientes es la matriz de conexión ramas-mallas C
- Curiosidad: 2º LK aplicada a las mallas … es familar

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C^t} * \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- **Reducen el número de ecuaciones a plantear:**
  - 1ª Ley de Kirchoff en nudos o gcb



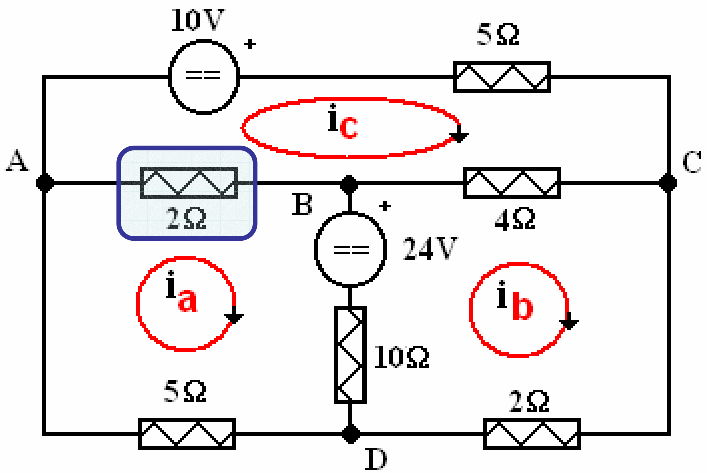
  - Las intensidades entran y salen del nudo o del gcb (siempre)
    - Sist. Ecuaciones (0)=(0) ► No añade información.

$$A \Rightarrow i_1 - i_4 + i_6 = 0 \Rightarrow (i_c) - (i_c - i_a) + (i_a) = 0$$

$$gcb - rama6 \Rightarrow i_1 + i_2 - i_3 + i_6 = 0 \Rightarrow (i_c) + (i_b - i_c) - (i_b - i_a) - (i_a) = 0$$

Procedimiento

- Planteamos las ecuaciones de la 2ªLK
  - Obviamente no hay intensidades ► sustituimos en función de las ecuaciones de ramas. Ej: R entre nudos A y B



$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & \boxed{-1} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a \Rightarrow \boxed{2(i_a - i_c)} + 24 + 10(i_a - i_b) + 5(i_a) = 0$$

$$b \Rightarrow 4(i_b - i_c) + 2(i_b) + 10(i_b - i_a) - 24 = 0$$

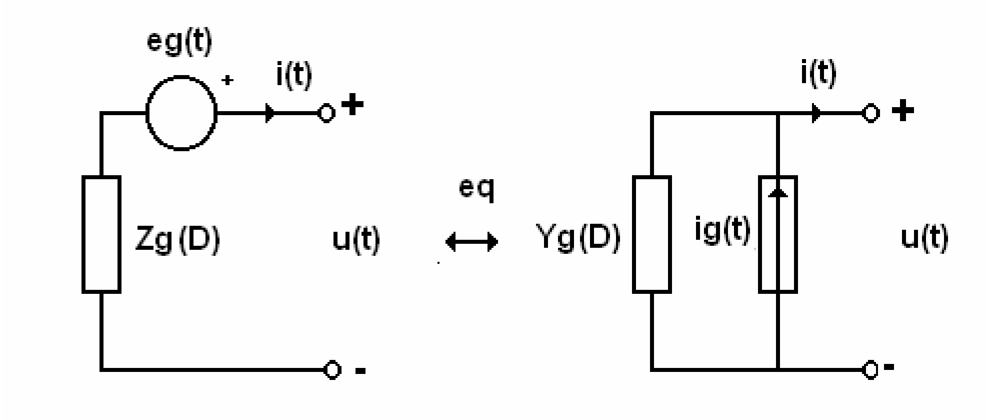
$$c \Rightarrow 2(i_c - i_a) - 10 + 5(i_c) + 4(i_c - i_b) = 0$$

$$\begin{pmatrix} -24 \\ 24 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (2+5+10) & -10 & \boxed{-2} \\ -10 & (2+10+4) & -4 \\ -2 & -4 & (5+2+4) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{pmatrix}$$

Matriz de Z de malla (Z_m). Simétrica

Herramienta de simplificación de ecuaciones

- Modificaciones en la geometría de las fuentes reales de tensión o intensidad.
  - Motivo: es más sencillo trabajar con fuentes de tensión al aplicar el método de mallas.



  - Condición: las ramas son equivalentes (tienen la misma ecuación de definición/modelo)

$$Fte.tension \Rightarrow u(t) = eg(t) - Zg(D)i(t)$$

$$Fte.\mathrm{int}\,ensidad \Rightarrow i(t) = ig(t) - Yg(D)u(t) \Rightarrow u(t) = \frac{ig(t)}{Yg(D)} - \frac{i(t)}{Yg(D)}$$

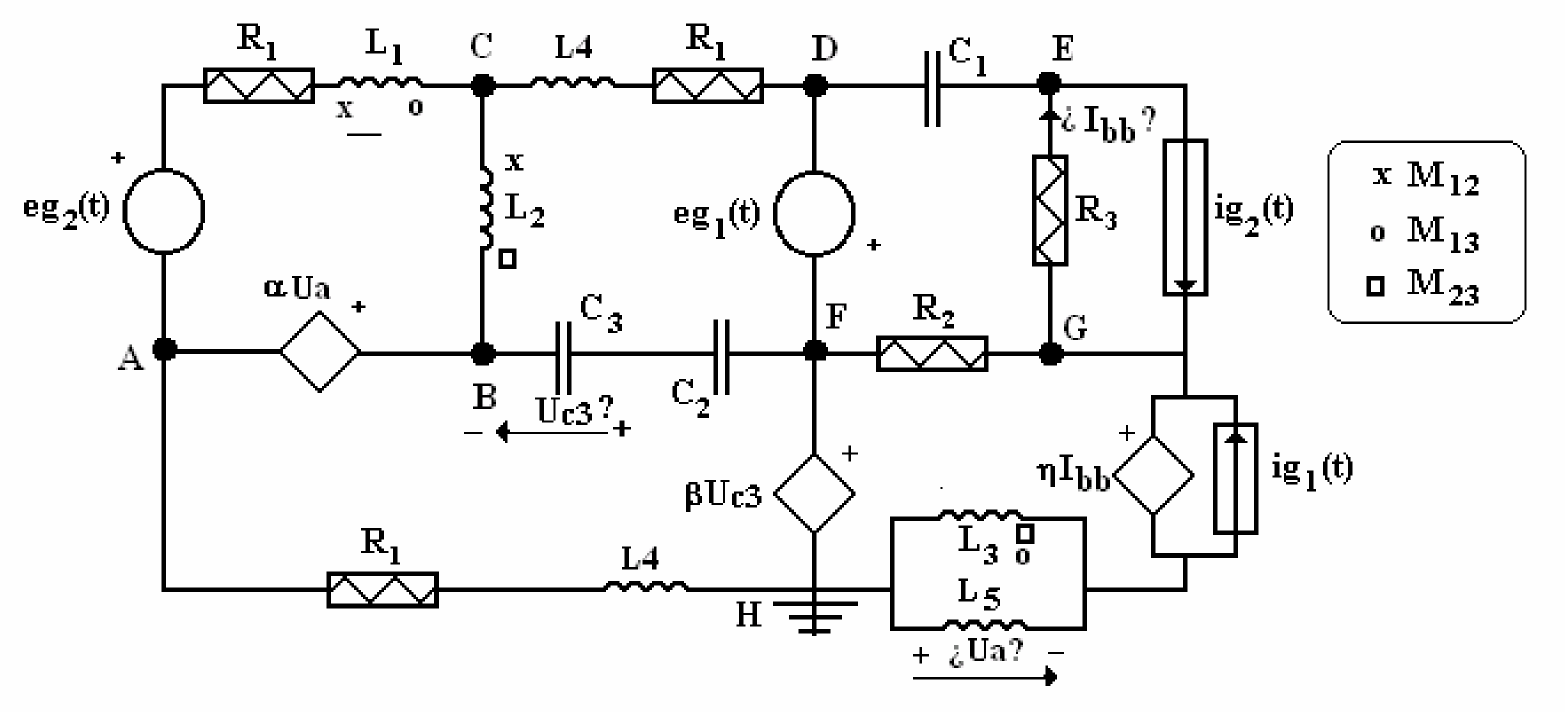
  - Conclusión:

$$Zg(D) = \frac{1}{Yg(D)}; eg(t) = \frac{ig(t)}{Yg(D)} = Zg(D)i(t)$$

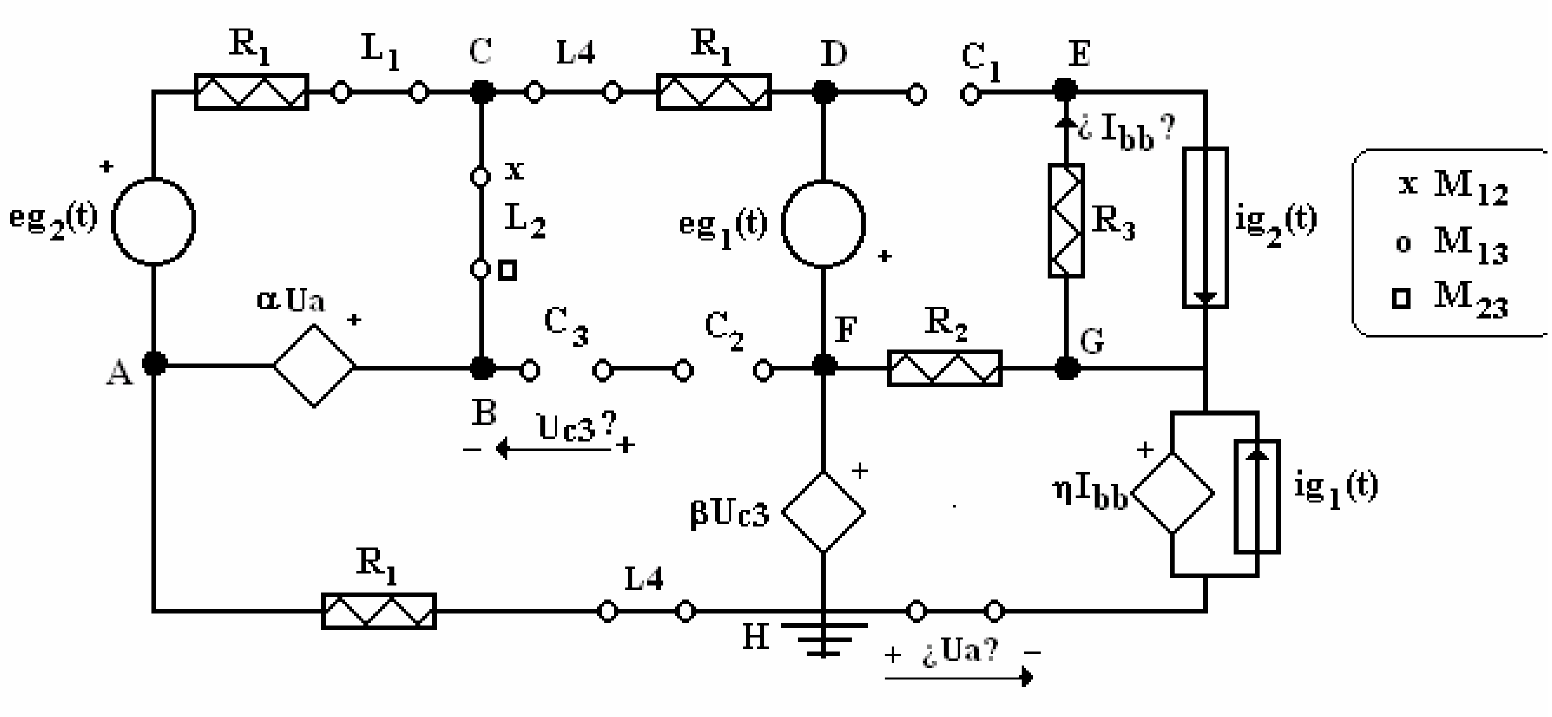
Ejemplos:

- Tratamiento de bobinas acopladas
- Circuitos con fuentes dependientes
- Circuitos en corriente continua en régimen permanente
- Más información:
  - http://www.gestiondelademanda.es
  - Bibliografía de la asignatura

- **Circuito en continua (régimen permanente)**
  - Todas las tensiones e intensidades son constantes
    - Condensadores: circuito abierto i=0.
    - Bobinas: circuito cerrado u=0 (estén acopladas o no).



- **Tendremos el siguiente circuito**
  - ¿Número de mallas? 3



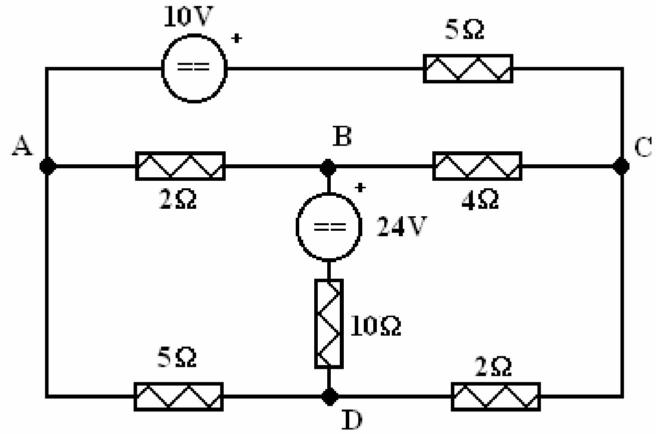
  - Error demasiado común: “la tensión en C_3 es cero”. Sólo lo es su intensidad, pero eso no significa que no exista carga y tensión.

- **Lección 5**
  - Métodos de análisis nodales: nudos

Volvemos al ejemplo de 12x12 ec. (lección 3)

La idea es simplificar el nº de ecuaciones (< 2*r). Comparemos métodos

- Nudos: rojo
- Mallas: verde



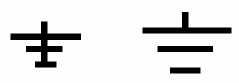
Nudos

Mallas

$$
\begin{array}{l}
\text{1ªLK gcb} \\ \\ \\
\text{2ªLK lb} \\ \\ \\
\text{Ec Def} \\ \\ \\ \\ \\ \\
\end{array}
\left[\begin{array}{cccccc|cccccc}
0 & \text{[illegible]} & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & \text{[illegible]} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & \text{[illegible]} & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & \text{[illegible]} & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \text{[illegible]} \\
\hline
-\text{[illegible]} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \text{[illegible]} & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \text{[illegible]} & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \text{[illegible]} \\
0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \text{[illegible]} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
*
\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \\ 0 \\ -24 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Fundamentos del método de análisis por nudos

- El método de grupos de corte básicos es similar (ver. Var. Estado en http://www.gestiondelademanda.es)
- 1) Seleccionamos un nudo de referencia (para eliminar la ecuación dependiente, ver lección 3).

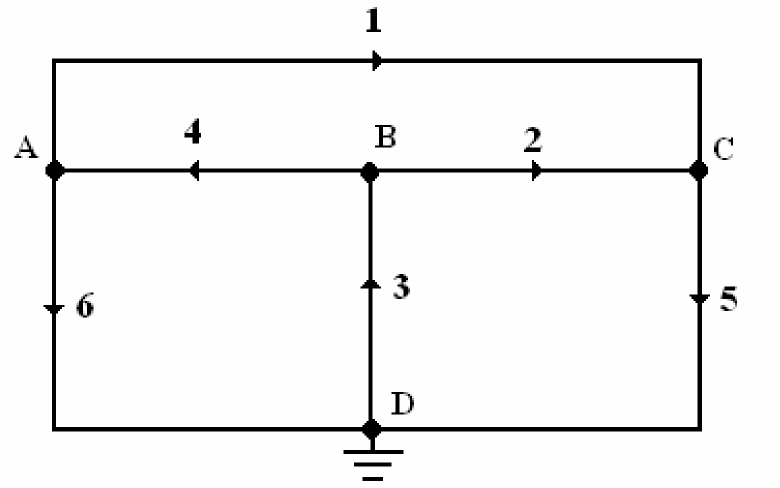


- 2) Seleccionamos unas variables ficticias ► (u_n): u de nudo
- Propiedades:
  - Las verdaderas incógnitas se pueden calcular a partir de ellas:

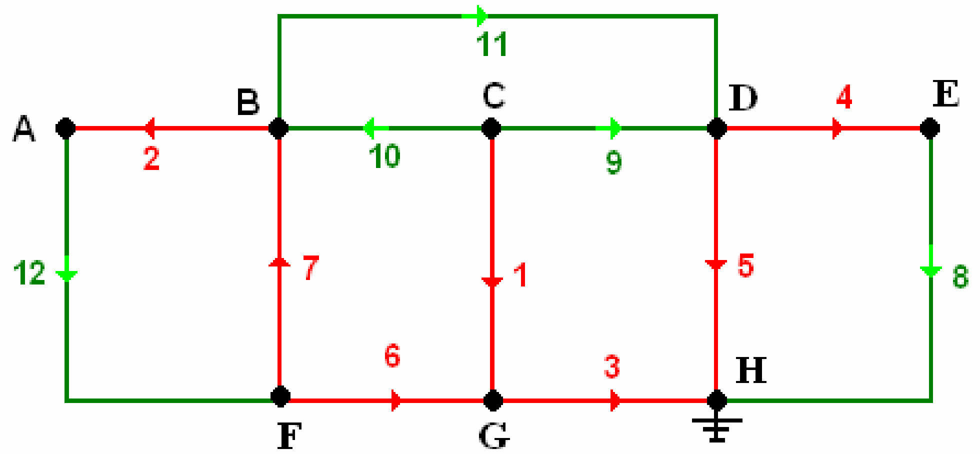
$$(u_r) = f(u_n)$$

  - Reducen el número de ecuaciones a plantear:
    - Las ecuaciones de la 2ª LK a los lazos básicos o mallas son innecesarias.
  - Son ficticias: no existe necesariamente tal tensión en un elemento (rama/dipolo) del circuito.
- 3) Planteamos las ecuaciones de la 1ªLK en los nudos.
- 4) Sustituimos las ec de rama en la 1ª LK, utilizando (u_n)

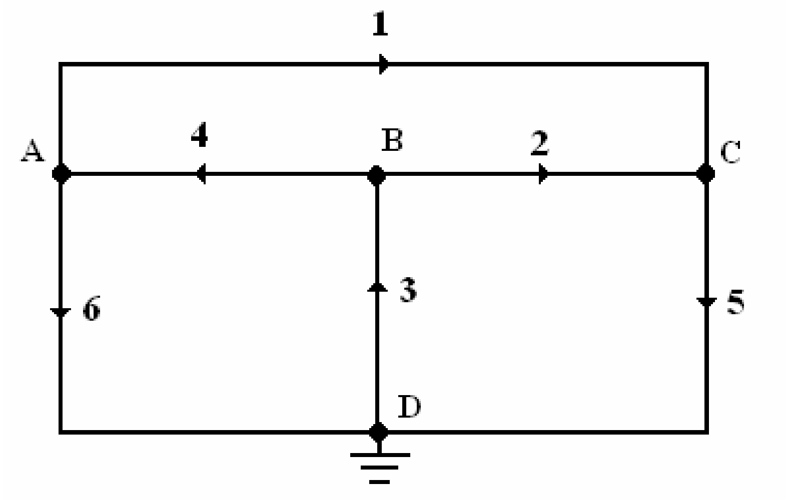
- **Ejemplo de tensiones de nudo (D: referencia)**
  - $U_{AD}=V_A-V_D$
  - $U_{BD}=V_B-V_D$
  - $U_{CD}=V_C-V_D$



  - Es "asimilable" a un potencial referido al nudo de referencia (simplifica la escritura de las ecuaciones)
- **Ejemplo 2: ¿qué es físicamente U_{AH} o U_{FH}?**



- **Veamos si se cumplen las propiedades:**
  - Las verdaderas incógnitas se pueden calcular a partir de ellas:√



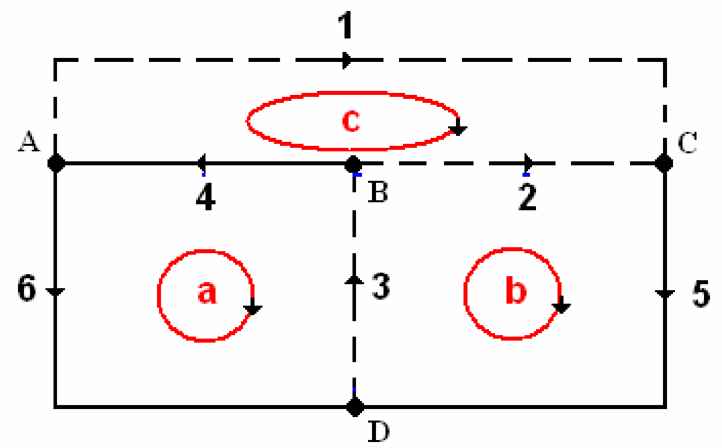
$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_{AD} \\ u_{BD} \\ u_{CD} \end{pmatrix}$$

  - La matriz de coeficientes es la matriz de conexión ramas-nudos A
- Curiosidad: 1º LK aplicada a los nudos (A, B, C) … es “familar”.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A^t

- **Reducen el número de ecuaciones a plantear:**
  - 2ª Ley de Kirchoff en mallas o lazos básicos

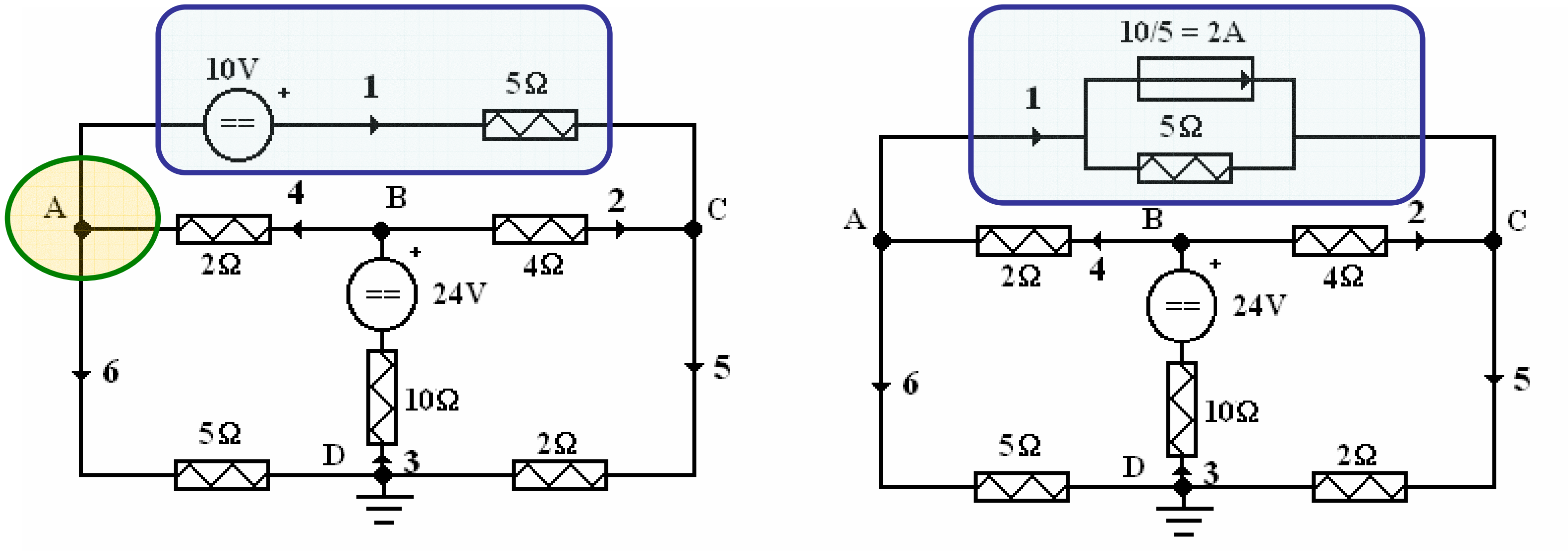


  - Las tensiones de nudo son potenciales a otra referencia, su suma en un lazo debe ser cero (indep del camino recorrido)
  - Sist. Ecuaciones (0)=(0) ► No añade información.

$$Malla - a \Rightarrow -u_3 - u_4 - u_6 = 0 \Rightarrow -(u_{BD}) - (u_{BD} - u_{AD}) - (u_{AD}) = 0$$

Procedimiento:

- Cambiamos las fuentes de tensión reales por fuentes de intensidad reales.



- Planteamos la segunda ley de Kirchof en los nudos. Por ejemplo A

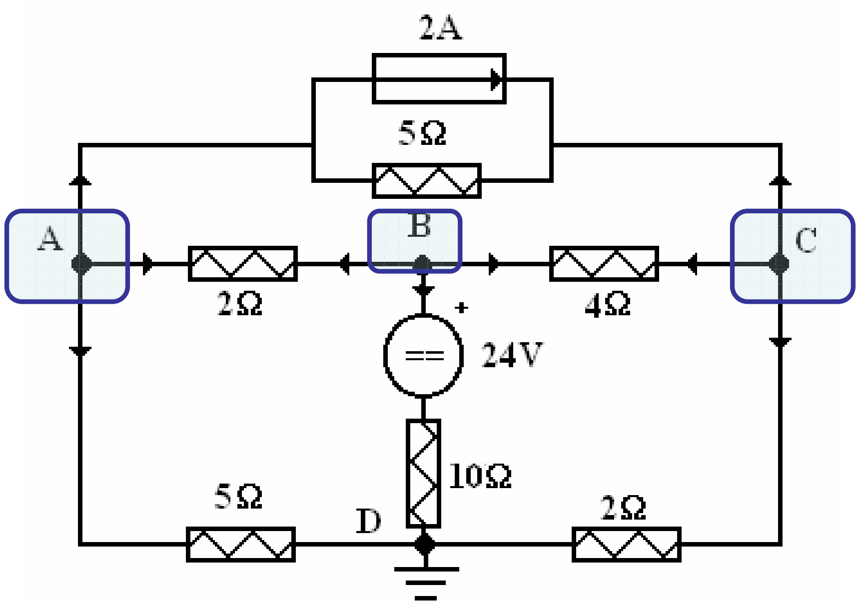
$$u_1 - u_4 + u_6 = 0; \rightarrow ec.ramas \Rightarrow i_1 = i_{g1}(t) + \frac{u_1}{R_1}$$

- Y sustituimos las ecuaciones de definición

$$(5A + \frac{u_{AD} - u_{CD}}{5}) - (\frac{u_{BD} - u_{AD}}{2}) + (\frac{u_{AD}}{5}) = 0$$

Procedimiento "alternativo"

- Planteamos las ecuaciones de la 1ªLK, olvidando los sentidos de rama. **Suponemos que todas las intensidades salen del nudo**.

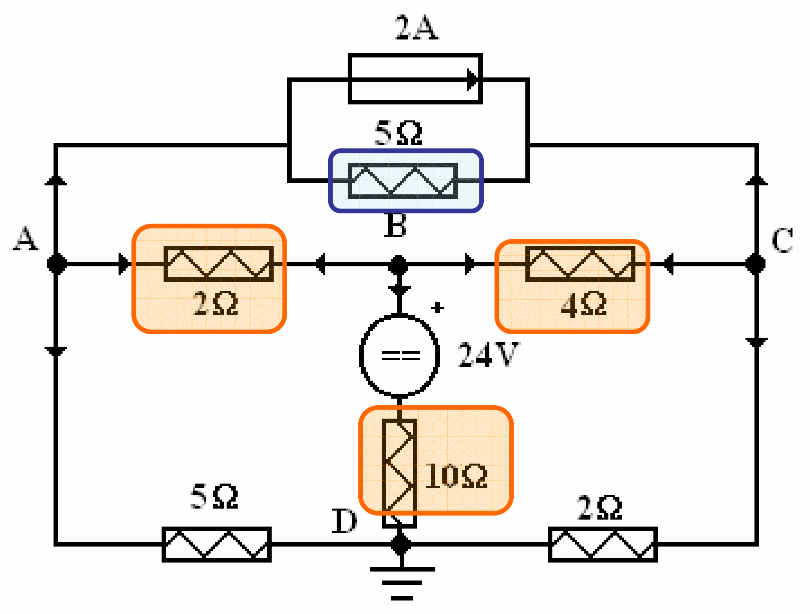


- En resumen

$$\left.\begin{array}{l} A \Rightarrow 2A + \frac{1}{5}(u_{AD} - u_{CD}) + \frac{1}{2}(u_{AD} - u_{BD}) + \frac{1}{5}(u_{AD} - u_{DD}) = 0 \\ B \Rightarrow \frac{1}{2}(u_{BD} - u_{AD}) + \frac{1}{10}\left[(u_{BD} - u_{DD}) - 24V\right] + \frac{1}{4}(u_{BD} - u_{CD}) = 0 \\ C \Rightarrow -2A + \frac{1}{5}(u_{CD} - u_{AD}) + \frac{1}{4}\left[u_{CD} - u_{BD}\right] + \frac{1}{2}(u_{CD} - u_{DD}) = 0 \end{array}\right\}$$

Procedimiento "alternativo" (II)

- Expresamos las ecuaciones de la 1ªLK en forma matricial, y vemos el sentido físico de los términos.



Diagonal ppal: Σ Y (de nudo)

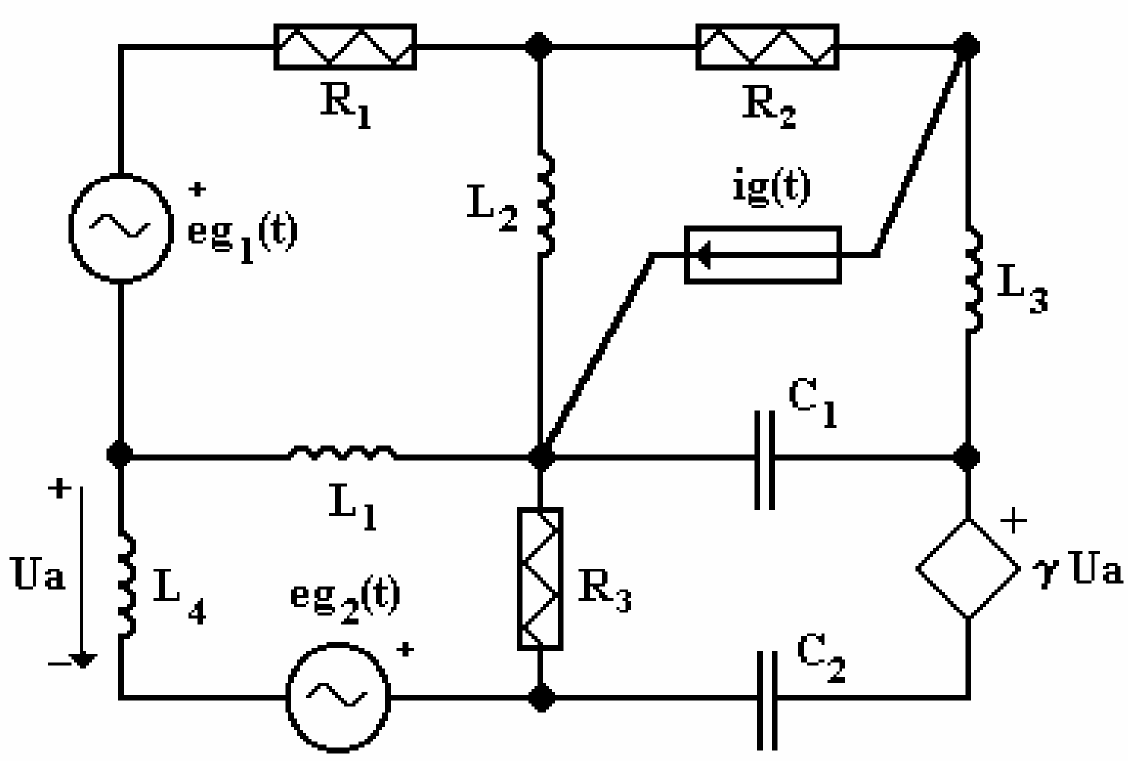
Fuera diag: -Y (compartidas)

- De forma compacta $(i_{gn}) = [Y_n]\,(u_n)$

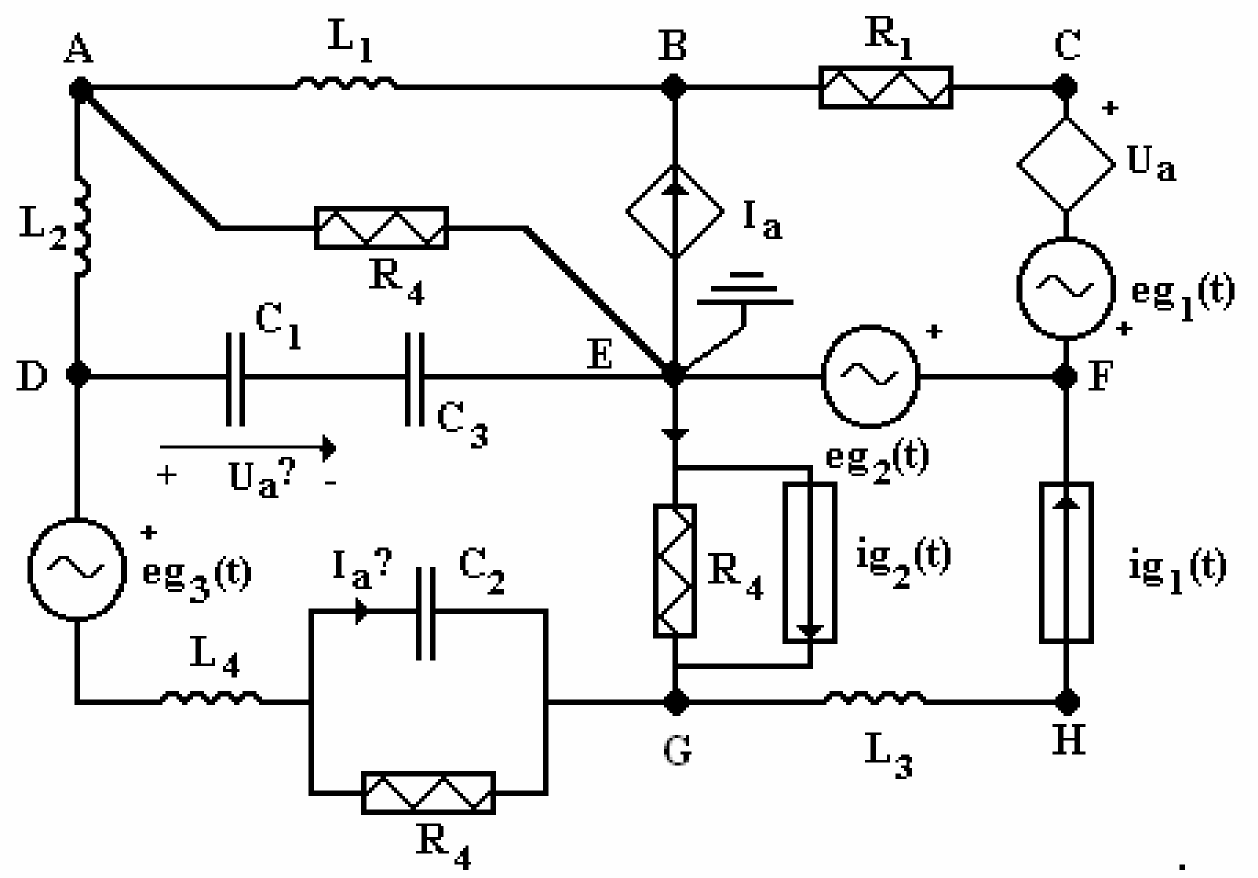
$$\begin{pmatrix} -2A \\ 2{,}4A \\ 2A \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (1/2+1/5+1/10) & -1/2 & \boxed{-1/5} \\ -1/2 & \boxed{(1/2+1/10+1/4)} & -1/4 \\ -1/5 & -1/4 & (1/5+1/2+1/4) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_{AD} \\ u_{BD} \\ u_{CD} \end{pmatrix}$$

- Tiene gran importancia en el análisis de Sistemas de Energía Eléctrica (flujo de cargas).

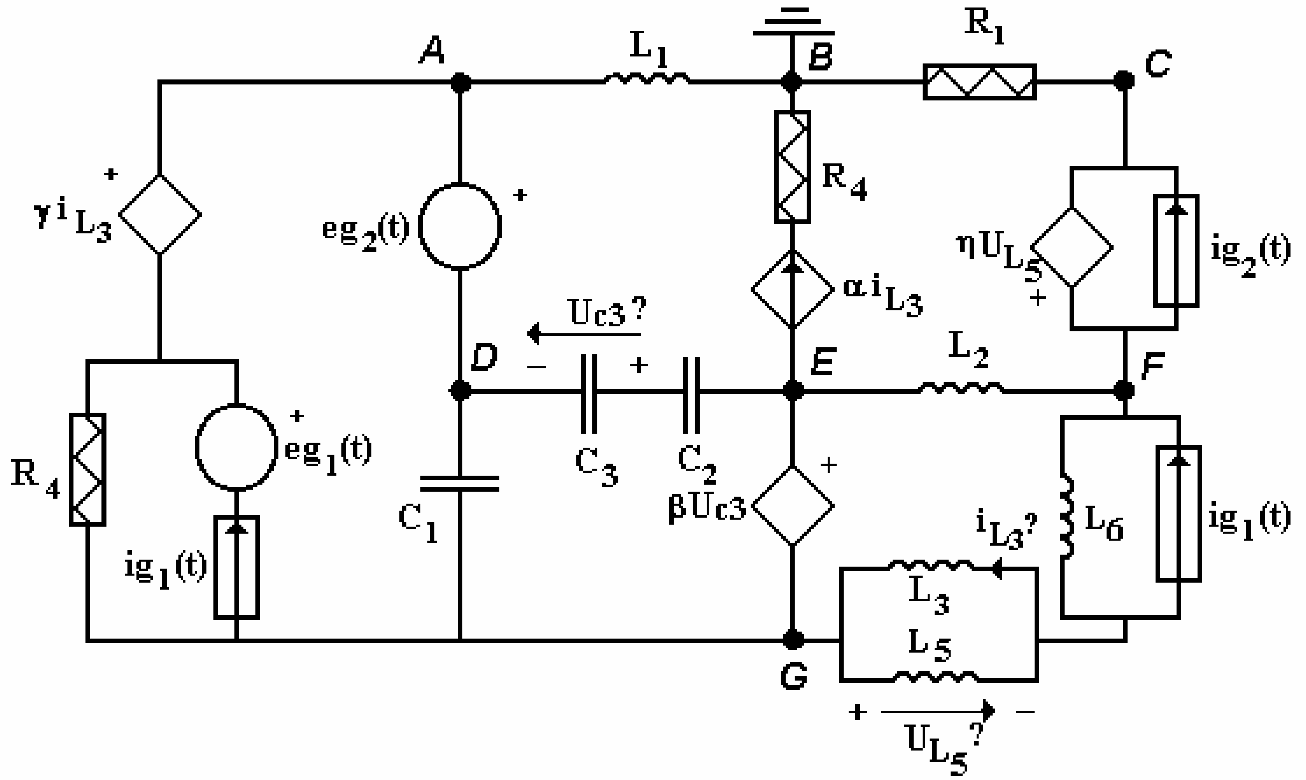
- **Ejemplos:**
  - Tratamiento de bobinas acopladas: desaconsejado, mejor utilizar mallas.
  - Circuitos con fuentes dependientes.
    - Problema con la transformación de fuentes: determinación de Ua



- **Circuitos con fuentes dependientes, dependencia de divisores de intensidad**



- **Circuitos con fuentes dependientes y ramas activas con varias fuentes, incluyendo fuentes de tensión entre nudos.**

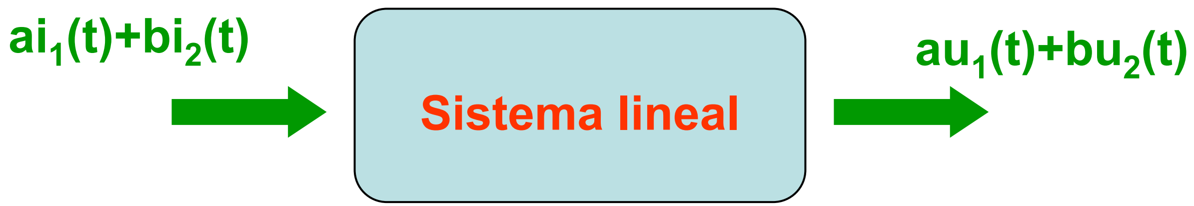


- Más información:
  - http://www.gestiondelademanda.es
  - Bibliografía de la asignatura

- **Lecciones 6 y 7 Teoremas fundamentales**

Hipótesis de linealidad

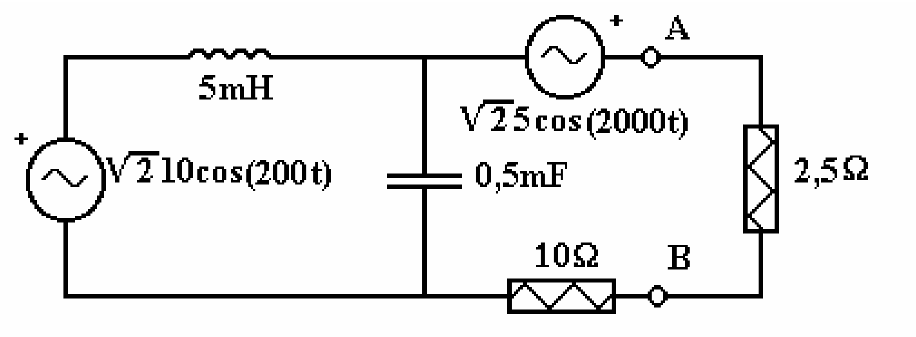
- Relaciones entre excitación (entrada) y respuesta (salida)
- Repasar: Tecnología Industrial II (2º Bachillerato LOGSE, LOE), Matemáticas (1º de Grado).
- Premisas:
  - Los elementos del circuito se caracterizan por una ec diferencial lineal (o si son NO lineales trabajan en una zona lineal) ► circuito lineal.
- El operador D (derivada) es lineal
  - D (a*x + b*y) = a*Dx + b*Dy; siendo a y b constantes.
  - En circuitos… repasar la lección 1 y 2



- Ejemplo: conocemos la respuesta a una fuente de 1V en un elemento (5A), ¿si la fuente dobla su valor (2V)? ► La respuesta del elemento es el doble de la original (10A)

Teorema de superposición

- Hipótesis: circuito lineal (elementos lineales)
- Enunciado: la respuesta de un circuito con varias fuentes (excitaciones independientes) es la suma de las respuestas elementales a cada fuente.
  - $i(t) = H_1 * e_{g1}(t) + H_2 * e_{g2}(t) + H_3 * i_{g1}(t)$
  - $u(t) = G_1 * e_{g1}(t) + G_2 * e_{g2}(t) + G_3 * i_{g1}(t)$
- Utilidad: analizar circuitos alimentados por fuentes con diferente expresión temporal (modelo):
  - Ejemplo1: una fuente DC y otra AC.
  - Ejemplo 2: una fuente senoidal de w=200rad/s con otra de 2000rad/s.



  - Ejemplo 3: una fuente triangular y otra senoidal.
  - Ejemplo 4: no son fuentes diferentes una ig(t)=5cos(100t) y una eg(t)=10sen(100t)
- Aplicaciones en nuestra asignatura: temas III y IV

Demostración: recordemos un ejemplo de nudos

- De forma compacta (i_{gn}) = [Y_n] (u_n)

$$\begin{pmatrix} -2A \\ 2{,}4A \\ 2A \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (1/2+1/5+1/10) & -1/2 & -1/5 \\ -1/2 & (1/2+1/10+1/4) & -1/4 \\ -1/5 & -1/4 & (1/5+1/2+1/4) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_{AD} \\ u_{BD} \\ u_{CD} \end{pmatrix}$$

- En general las ecuaciones son de la forma:

$$\begin{pmatrix} i_{g1} \\ i_{g2-}i_{g1} \\ Y_g(D)e_{g1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11}(D) & Y_{12}(D) & Y_{13}(D) \\ Y_{12}(D) & Y_{22}(D) & Y_{23}(D) \\ Y_{13}(D) & Y_{23}(D) & Y_{33}(D) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_{AD} \\ u_{BD} \\ u_{CD} \end{pmatrix}$$

- Resolvemos por Cramer, por ejemplo U_{AB}:

$$u_{AD} = \frac{\left\| \begin{matrix} i_{g1} & Y_{12}(D) & Y_{13}(D) \\ i_{g2}-i_{g1} & \boxed{\begin{matrix} Y_{22}(D) & Y_{23}(D) \\ Y_{23}(D) & Y_{33}(D) \end{matrix}} \\ Y_g(D)e_{g1} & & \end{matrix} \right\|}{\boxed{\left| \begin{matrix} Y_{11}(D) & Y_{12}(D) & Y_{13}(D) \\ Y_{12}(D) & Y_{22}(D) & Y_{23}(D) \\ Y_{13}(D) & Y_{23}(D) & Y_{33}(D) \end{matrix} \right|}} = \frac{1}{\boxed{\Delta Y_n}}\left[\boxed{\Delta_{11}(D)} i_{g1} + \Delta_{12}(D)(i_{g2}-i_{g1}) + \Delta_{13}(D)Y_g e_g\right]$$

Interpretación física:

$$u_{AD} = \frac{1}{\Delta Y_n}\left[\Delta_{11}(D) i_{g1} + \Delta_{12}(D)(i_{g2} - i_{g1}) + \Delta_{13}(D) Y_g e_g\right]$$

- La respuesta total de un circuito es la suma de las respuestas particulares a cada una de las fuentes (excitaciones)

$$u_{AD} = \frac{1}{\Delta Y_n}\left[\underbrace{[\Delta_{11}(D) - \Delta_{12}(D)]}\, i_{g1} + \Delta_{12}(D) i_{g2} + \Delta_{13}(D) Y_g e_g\right]$$

- ¿Cómo obtenemos la función de transferencia H, entre E y S?

$i_{g1}(t)$

E

$$\frac{1}{\Delta Y_n}\left[\Delta_{11}(D) - \Delta_{12}(D)\right]$$

$u_{AD}(t))$

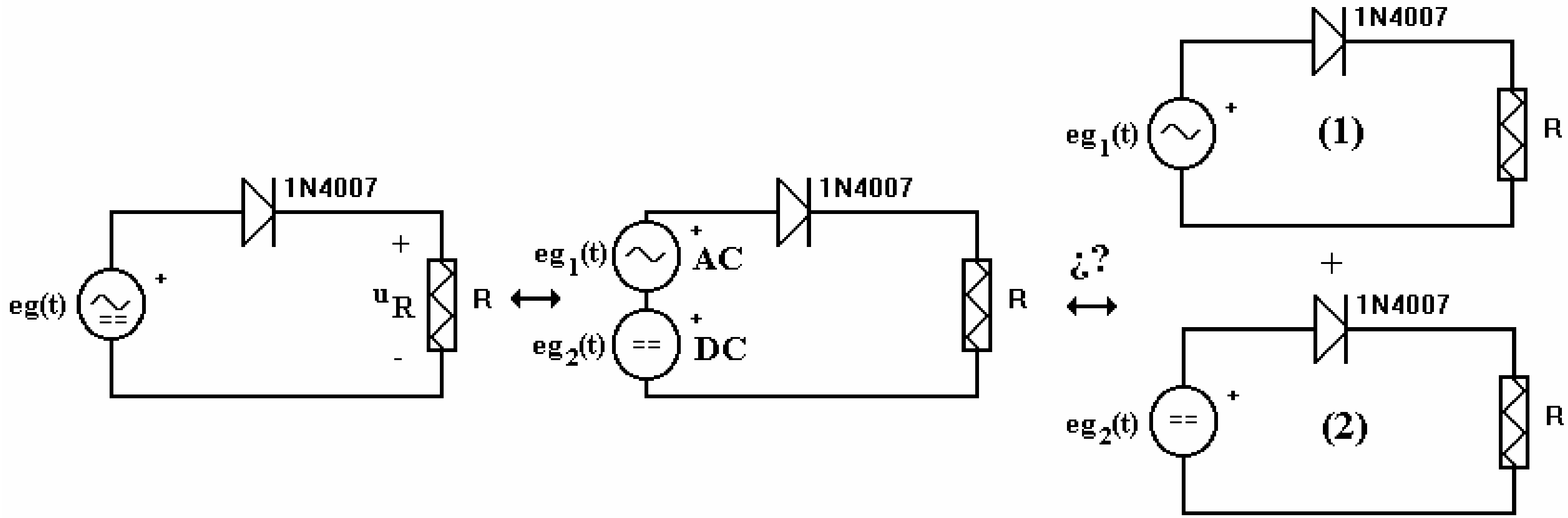
S

- **Matemáticamente: anulando términos (ej. i_{g2} y e_g)**

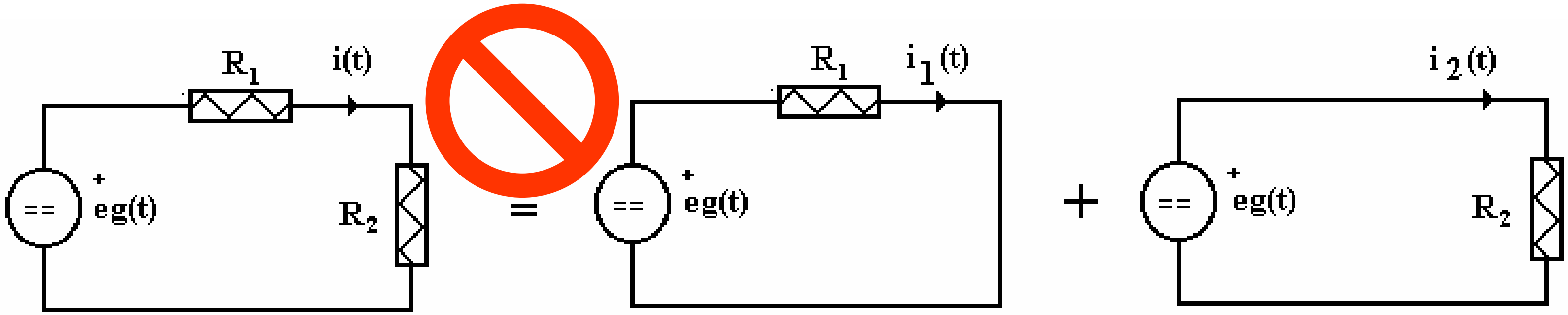
$$u_{AD}=\frac{\left|\begin{bmatrix} i_{g1} & Y_{12}(D) & Y_{13}(D) \\ \boxed{0}-i_{g1} & Y_{22}(D) & Y_{23}(D) \\ Y_g(D)\boxed{0} & Y_{23}(D) & Y_{33}(D) \end{bmatrix}\right|}{\begin{bmatrix} Y_{11}(D) & Y_{12}(D) & Y_{13}(D) \\ Y_{12}(D) & Y_{22}(D) & Y_{23}(D) \\ Y_{13}(D) & Y_{23}(D) & Y_{33}(D) \end{bmatrix}}=\frac{1}{\Delta Y_n}\left[\Delta_{11}(D)i_{g1}+\Delta_{12}(D)(\boxed{0}-i_{g1})+\Delta_{13}Y_g\boxed{0}\right]$$

- **En un circuito eléctrico: haciendo nulas las fuentes que no nos interesen.**
  - Anular eg(t)=0 ► circuito cerrado
  - Anular Ig(t)=0 ►circuito abierto
  - Dividiremos los circuitos en una Σ (subcircuitos o esquemas) de superposición (cada uno de ellos con una o varias fuentes).

- **Ejemplo 1: verificación de hipótesis**

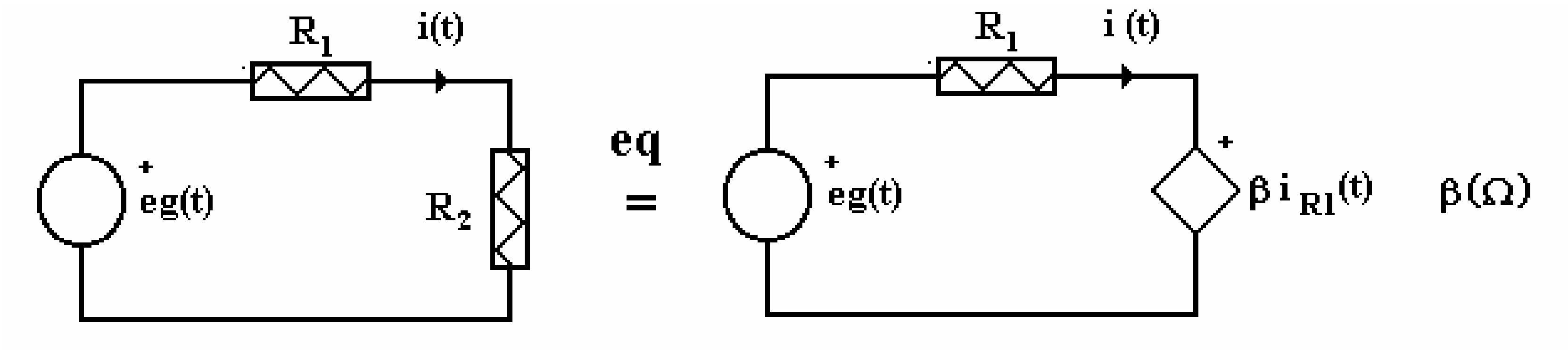


- **Ejemplo 2: (siete errores). No existe superposición en impedancias/admitancias.**



Regla de sustitución

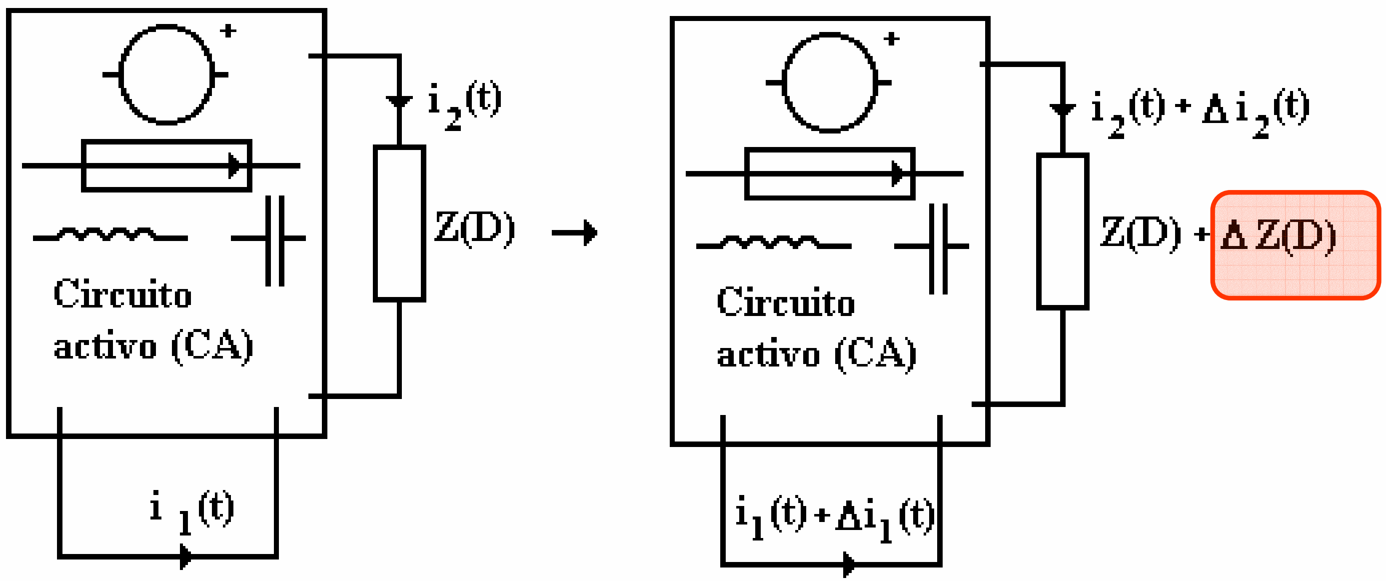
- Hipótesis: elementos lineales.
- Utilidad: equivalente de elementos pasivos (o de elementos pasivos con carga inicial ► tema IV)
- Enunciado: si se conoce la tensión en un conjunto de elementos pasivos se pueden sustituir por una fuente dependiente.
- Demostración: la sustitución de elementos no altera las ecuaciones del circuito.



$$eg(t) = R_1(t)i(t) + R_2(t)i(t) \Leftrightarrow \begin{array}{l} eg(t) = R_1(t)i(t) + \beta * i_{R1}(t) \\ (\beta = R_2 ; i_{R1}(t) = i(t)) \end{array}$$

Teorema de compensación

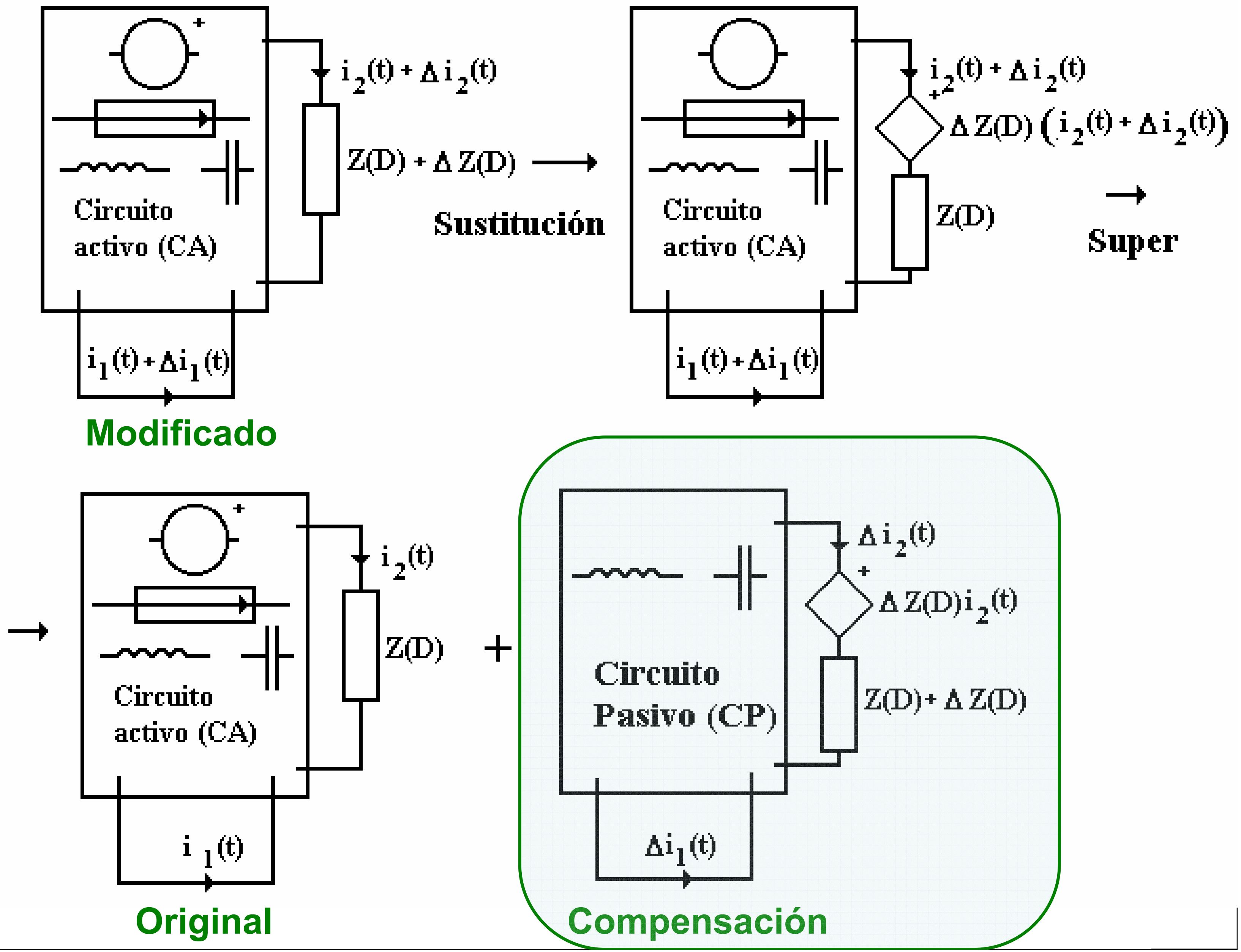
- Hipótesis: trabajamos con elementos lineales.
- Utilidad: análisis de sensibilidad de un circuito cuando se produce el incremento de algún elemento pasivo $\Delta Z(D)$.
  - Errores de dispositivos de medida.
  - Determinar qué tolerancias son admisibles en los parámetros de un circuito.
- Enunciado: se pueden determinar los $\Delta i(t)=f(\Delta Z(D)$ a partir de un circuito muy simplificado, respecto al original, en el que sólo existe una fuente que depende del parámetro del elemento que cambia.



Circuito original

Circuito a estudiar

Teorema de compensación (II): demostración



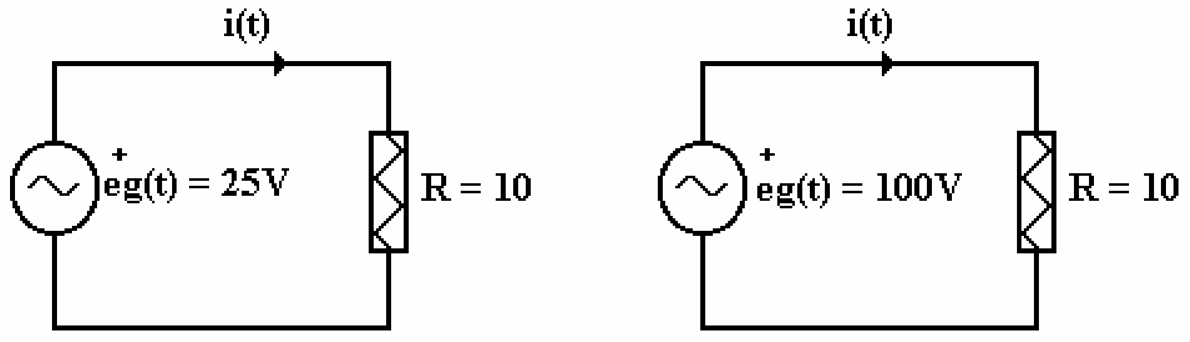
Ecuación terminal de un dipolo

- Hipótesis: linealidad del circuito
- Utilidad: demostración del teorema de Thevenin/Norton
- Enunciado: cada dipolo tiene una relación característica que sólo depende de los elementos que haya en su interior.

$$u(t) = f(i(t))$$

$$i(t) = g(u(t))$$

- Aclaración: lo "característico" del dipolo es f( ) o g( ), los valores específicos de u(t) e i(t) no dependen SOLO de él.
-

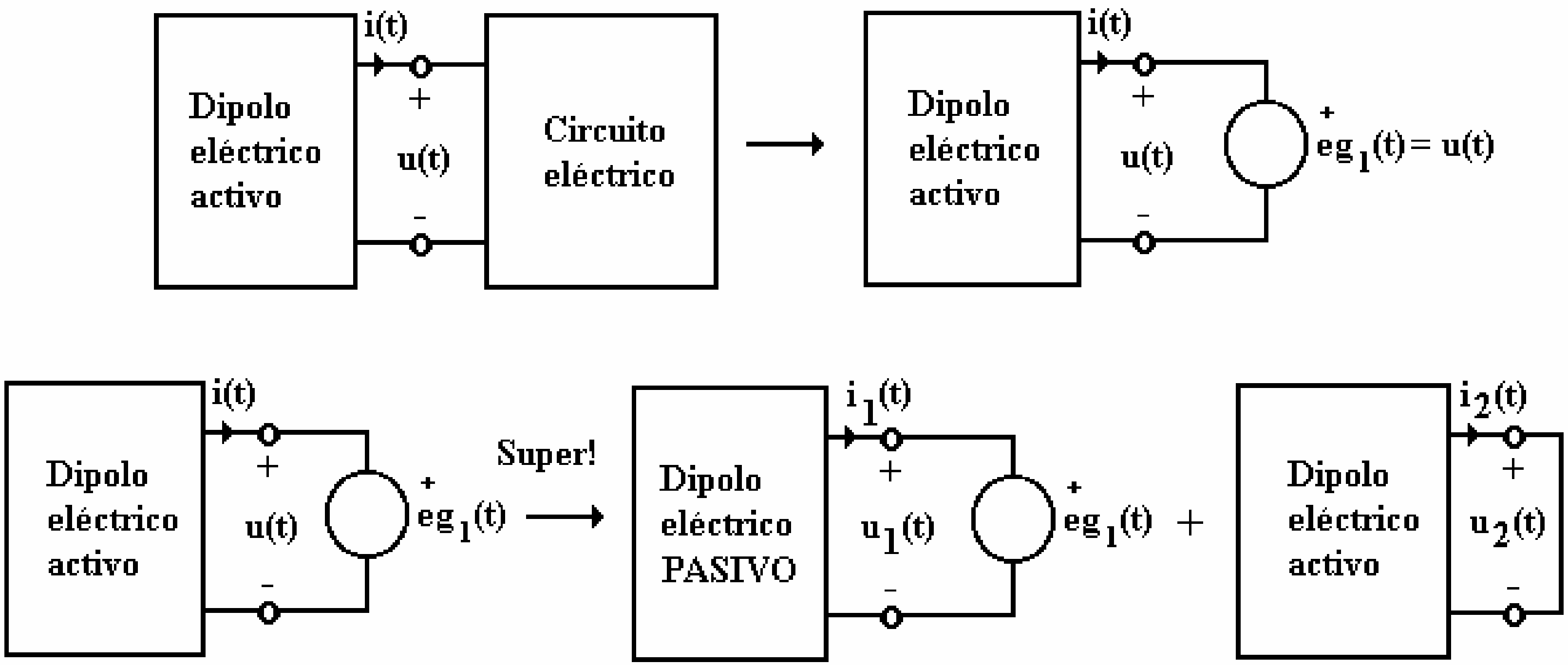


$$u(t) = 25V \qquad u(t) = 100V$$

$$i(t) = 2{,}5A \qquad i(t) = 10A$$

Ecuación terminal del dipolo (II)

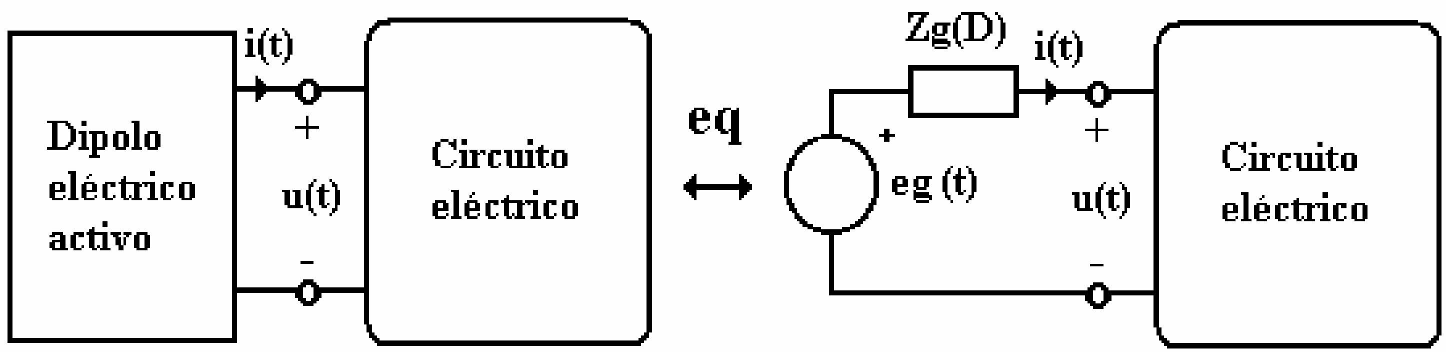
- Demostración: sustituimos el circuito eléctrico por una fuente que genera la misma tensión y aplicamos superposición



- Resultados:
  - $u_2(t)=0$; $i_2(t)$: es la intensidad de cortocircuito (**$i_{cc}(t)$**) es característica del propio dipolo, no "actúa nadie más".
  - Podemos obtener un equivalente del dipolo pasivo Zeq(D), tal que $u_1(t)=Z_{eq}(D)*\ i_1(t)$
- **$i(t)= i_1(t) + i_2(t) = - u(t)/Z_{eq}(D) + i_{cc}(t)$ (q.e.d.)**

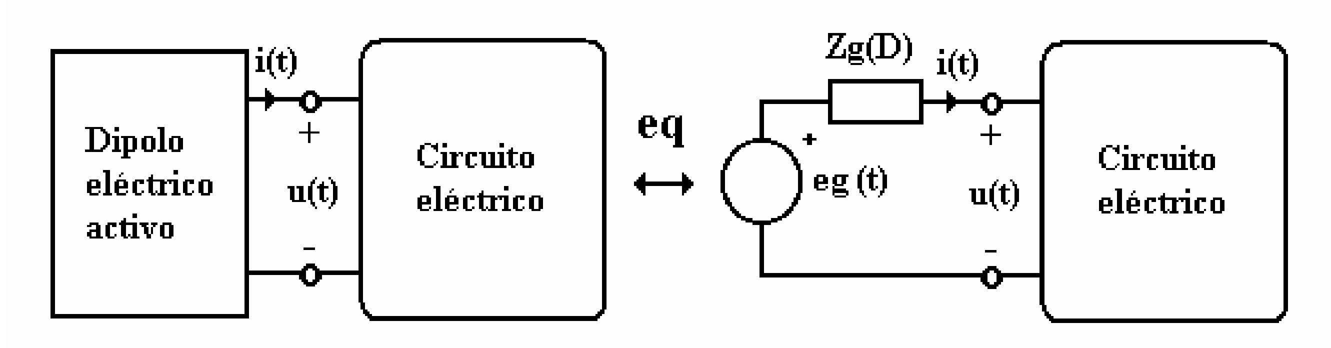
Teorema de Thevenin/Norton

- Hipótesis: como siempre, la linealidad.
- Utilidad: reducción de un dipolo (por muy complejo que sea) a una fuente real.
- Aplicaciones: simplificar partes de un circuito que no nos interesen (recuerda: los equivalentes son sólo “puertas afuera”, internamente “destruyen” el elemento).
- Enunciado: un dipolo activo real puede sustituirse por un equivalente en forma de fuente de tensión (Thevenin) o de intensidad real (Norton):
  - Tensión eg(t): tensión de vacío del dipolo activo ► $u_0(t)$.
  - Intensidad ig(t): intensidad de cortocircuito del dipolo ► $i_{cc}(t)$.
  - Impedancia Zg(D): impedancia del dipolo pasivo (sin fuentes).



Teorema de Thevenin/Norton: demostración

- Thevenin es el equivalente fuente de tensión real.
- Norton es el equivalente fuente de intensidad real.
- Recuerda: conversión de fuentes (lección 4 y 5)



- Ec. terminal de un dipolo (izda)

$$i(t) = -\frac{u(t)}{Z_{eq}(D)} + i_{cc}(t)$$

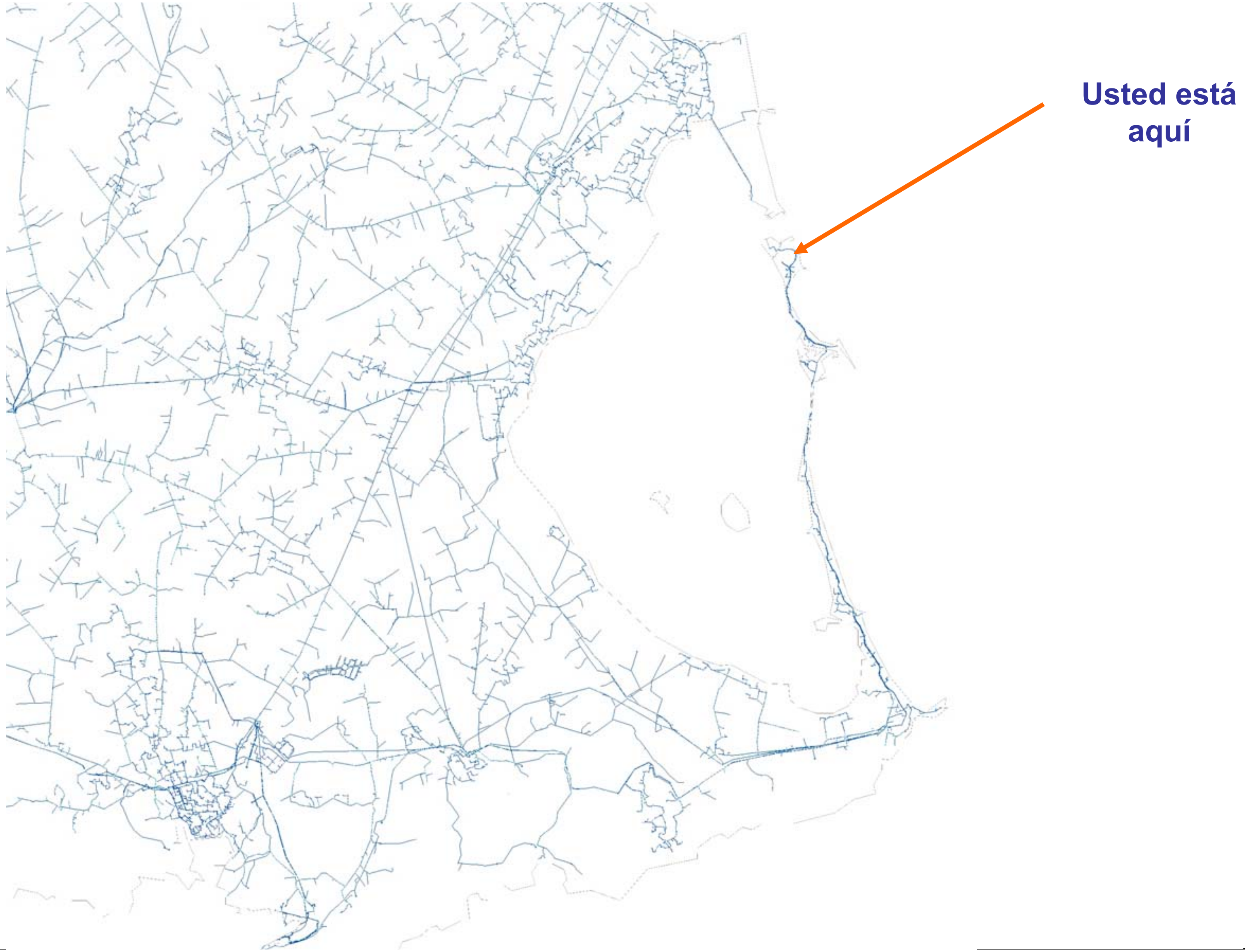
- Ec. terminal de la fuente (dcha)

$$i(t) = -\frac{u(t)}{Z_g(D)} + \frac{e_g(t)}{Z_g(D)}$$

$$\frac{e_g(t)}{Z_g(D)} = i_{cc}(t) \Rightarrow i_g(t) = i_{cc}(t)$$

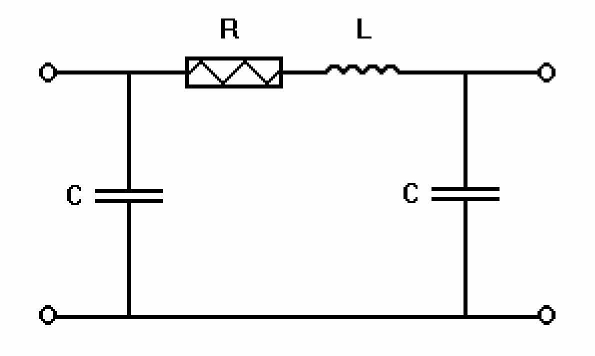
$$Z_g(D) = Z_{eq}(D)$$

- **Ejemplo de utilidad del Teorema de Thevenin**
  - Red eléctrica comarcal-provincial (raya=línea eléctrica) ¿nudos? 1000, 2000 …



Ejemplo de utilidad del Teorema de Thevenin (II)

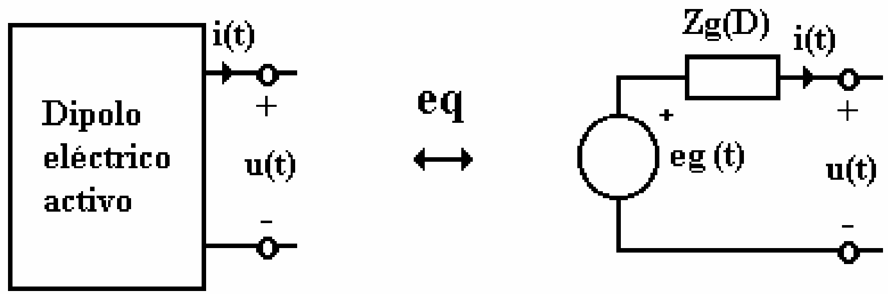
- Cada raya es una línea y, eléctricamente, una línea es:



- Un problema muy complejo … salvo que la red eléctrica pueda reducirse a un dipolo ►Thevenin/Norton
  - Tensión de vacío Uo (usted está aquí)
  - Intensidad de cortocircuito Icc (usted está aquí)
  - Potencia de cortocircuito Uo*Icc (usted está aquí)

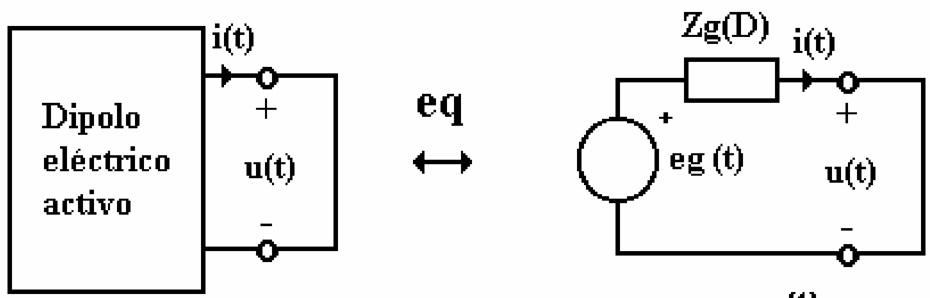
Ensayo de vacío/cortocircuito ► Eq. Thevenin

- El ensayo de vacío es sencillo (poco problemático)
- El ensayo de cortocircuito es destructivo (¿solución?): los cortocircuitos provocan elevadas disipaciones de calor (Ri^2)
- El equivalente funciona sea cual sea el cto al que se conecte, es decir



$i(t) = 0 \quad u(t) = u_0$ $\qquad$ $eg(t) = u_0$

Ensayo de vacío



$u(t) = 0 \quad i(t) = i_{cc}$ $\qquad$ $i(t) = \dfrac{eg(t)}{Zg(D)}$

Ensayo de cortocircuito

Teorema de Tellegen

- Hipótesis: como siempre, la linealidad.
- Utilidad: ppo de conservación de la energía, en el tema III lo usaremos demostración del teorema de Boucherot.
- Aplicaciones: pocas, muy pocas. Balance generación-demanda.

- Enunciado: en un circuito de r ramas
  - Tenemos (u_r) que cumplen la 1ª LK en los nudos (o gcb)
  - Tenemos (i_r) que cumplen la 2ªLK en mallas (o lazos básicos)
  - (u_r) e (i_r) no son necesariamente la solución del cto.
  - Entonces se cumple $\Sigma(u_k * i_k) = 0$; k= 1,2…r
- Demostración: propiedades de las matrices C y A de conexión

$$\sum_{k=1}^{r} u_k * i_k = (u_r)^t * (i_r) = \left((A)(u_n)\right)^t * (i_r) = (u_n)^t * \underbrace{(A)^t * (i_r)}_{\text{1ª LK en nudos}} = 0$$