E.T.S. de Ingeniería Industrial

Universidad Politécnica de Cartagena

Curso Académico 2011/12

Análisis de Circuitos

Tema I. Principios básicos

Elementos constitutivos de los circuitos eléctricos

Profesor: Dr. Antonio Gabaldón

Dpto de Ingeniería Eléctrica. E-mail: antonio.gabaldon@ upct.es

- **Objetivos**
  - Repasar conceptos básicos de circuitos:
    - Magnitudes y unidades
    - Leyes de Kirchoff
    - Referencias y criterios de signos
    - Nomenclatura,…
  - Conocer, diferenciar y aplicar:
    - Modelos ideales
    - Modelos reales
    - … de los principales elementos de los circuitos eléctricos
- **Resultados del aprendizaje:**
    - R1) Formular un modelo de los elementos básicos de los circuitos eléctricos, comprendiendo la relación entre modelo matemático y comportamiento físico, diferenciando entre elementos ideales, reales, lineales y no lineales.
    - R3) Indentificar y clasificar las diferentes asociaciones de elementos pasivos (serie/paralelo), construyendo su equivalente eléctrico.

.

Magnitudes y unidades

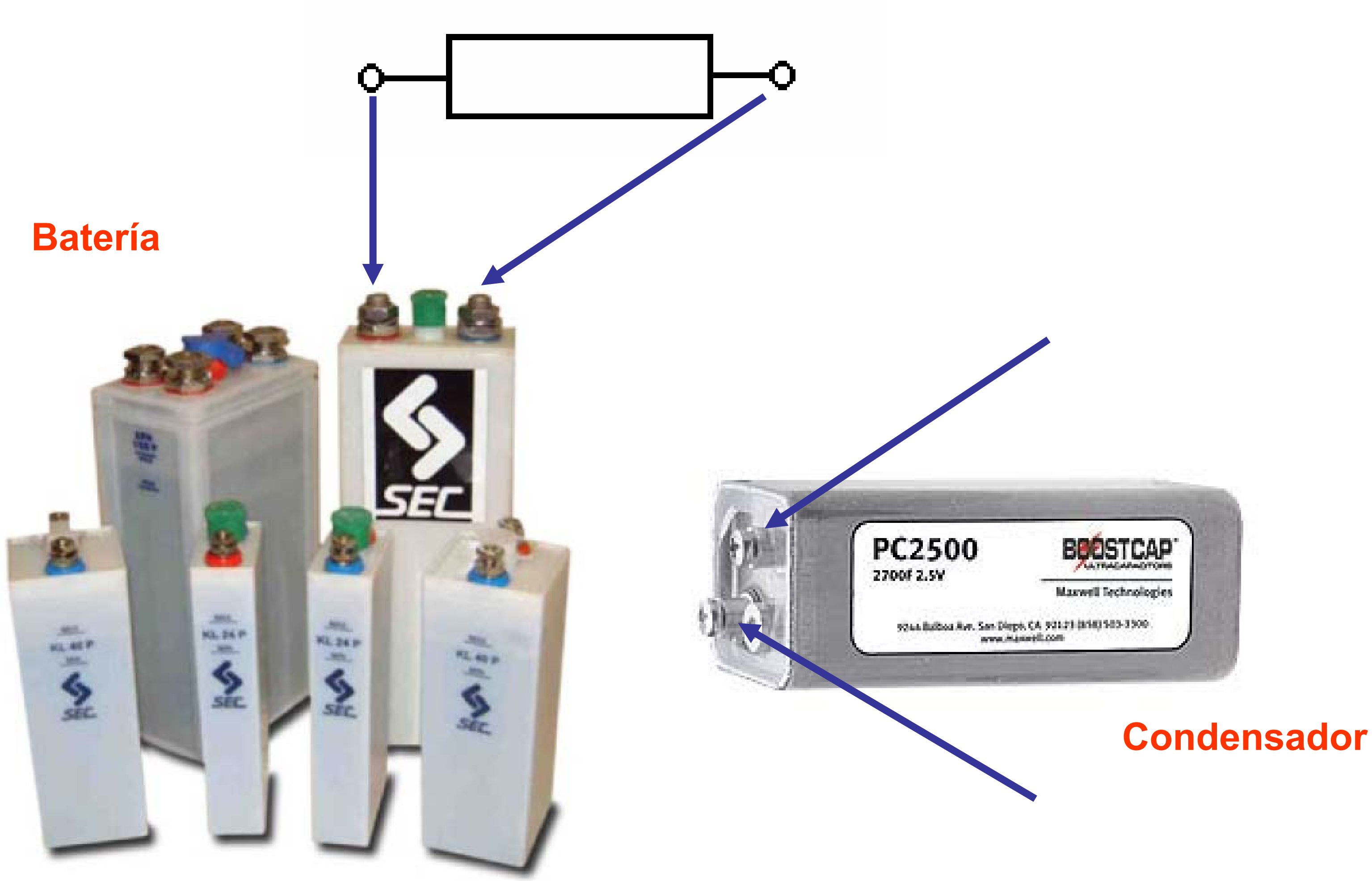
Magnitud	Representación	Unidad S.I.
Tensión (voltage, ddp)	u(t) (excep. v(t))	V (voltios)
Intensidad (corriente)	i(t)	A (amperios)
Potencia (instantánea)	p(t)	W (vatios)
Energía	w(t)	J (julios) (kWh, no SI, práctica)
Carga eléctrica	q(t)	C (culombios)
Campo Eléctrico	E(t,x)	V/m (voltios/m)
Intensidad de campo magnético	H(t,x)	Av/m (amperio-vueltas/m)
Inducción magnética	B(t,x)	T (teslas)
Flujo magnético	Φ(t,x)	Wb (weber)

Múltiplos y divisores

Múltiplo/ divisor	Unidad fund. (x)	Ejemplos en Electrotecnia
G (giga)	10^{9}	Potencia eléctrica de España Potencia de una central nuclear o de ciclo combinado (1-1,2GW)
M (mega)	10^{6}	Consumo pico de la ETSII de Cartagena (2MW). AVE (8-10MW)
K (kilo)	10^{3}	Potencia contratada en casa (1-10kW) Tensión de alimentación al campus (20kV)
m (mili)	10^{-3}	Bobinas. Intensidades en un instrumento de medida
μ (micro)	10^{-6}	Condensadores
p (pico)	10^{-9}	Condensadores
n (nano)	10^{-12}	Condensadores

Dipolo

- Elemento con dos terminales (polos) eléctricos que pueden conectarse a otros elementos.
- Representación

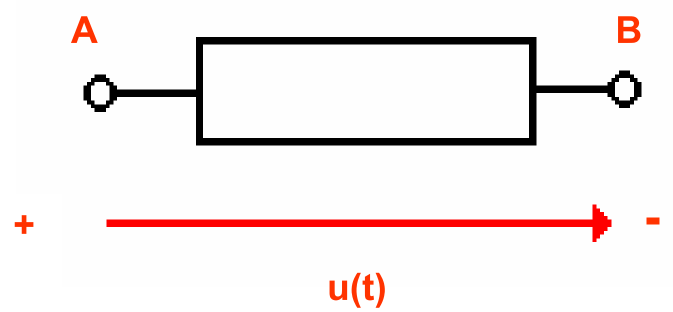


Tensión u(t)

- Es una función del tiempo, es decir, puede variar de un instante de tiempo a otro según una ley matemática. Por ejemplo en un enchufe de 230V en nuestra casa:

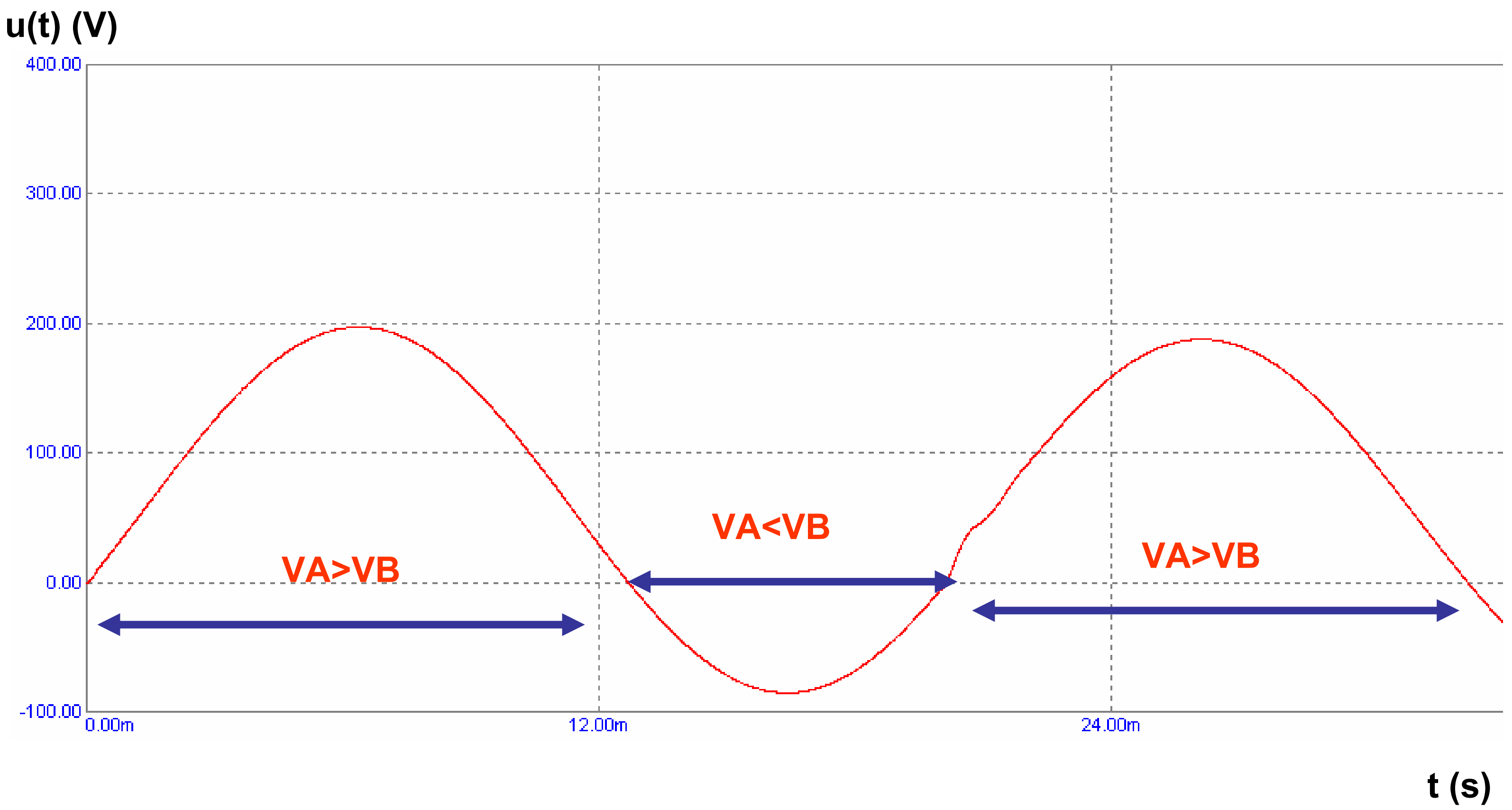
$$u(t) = \sqrt{2} * 230 * \cos(100 * \pi * t) V$$

- Otras veces es constante, como en la batería de un automóvil:
  - u(t) = 12 V
- Diferencia de potencial eléctrico entre dos puntos (ddp). Si A tiene mayor potencial (energía) que B, lo indicaremos con una flecha indicando el sentido de potenciales decrecientes y SIEMPRE un signo + (A) – (B)



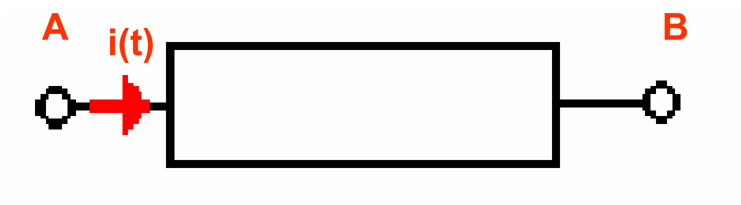
ÍNDICE

Interpretación de un gráfico de tensión



Intensidad i(t)

- Es una función del tiempo, es decir, puede variar de un instante de tiempo a otro según una ley matemática.
- Cantidad de carga positiva que atraviesa una sección (conductor) en el tiempo. Hay que definir su sentido. Si la i(t) va desde el terminal (polo) A hacia el B, lo indicaremos con una flecha.



- Si la intensidad sale negativa … significa que el flujo de cargas va en sentido inverso a la flecha.
- Justificación del convenio de movimiento de cargas positivas para sentido de i(t)
  - Tradición electrotécnica: desde el siglo XVIII
  - No sólo existen conductores metálicos sino electrolíticos (baterías) y gaseosos (tubos fluorescentes) en dónde se mueven cargas + y – en sentidos opuestos.

- **Potencia y energia:**
  - Potencia instantánea p(t)
  - Cuestión (¿generada/consumida?)

$$p(t) = u(t) * i(t)$$

  - Energía w(t)
  - Cuestión (¿cedida/almacenada?) Contadores de energía (€)

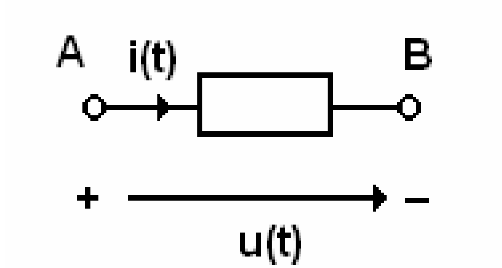
$$w(t) - w(t_0) = \int_{t0}^{t} p(t)dt$$

ÍNDICE

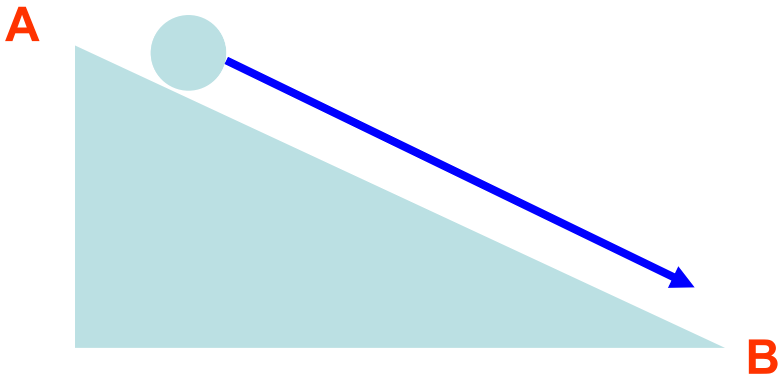
Convenio de potencias: tensiones e intensidades en el mismo sentido

- Suponemos u(t) > 0, mayor potencial en A
- Suponemos i(t) > 0, movimiento de cargas + de A hacia B

- Empleamos un símil gravitatorio (potencial eléctrico vs potencial gravitatorio)

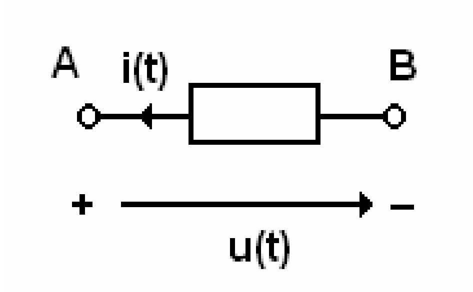


- El dipolo (masa puntual) pierde energía potencial que consume el dipolo (conservación de energía)

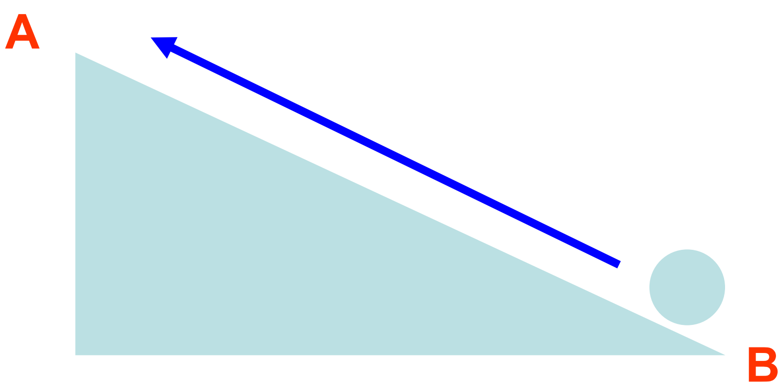


- Si obtenemos $p(t_1) < 0$ en un t_1 "tranquilos", nos hemos equivocado y genera: Es usual equivocarse porque suponemos u(t) e i(t).

- **Convenio de potencias: tensiones e intensidades en distintos sentidos**
    - Suponemos u(t) > 0, mayor potencial en A
    - Suponemos i(t) > 0, movimiento de cargas + de B hacia A
  - Empleamos un símil gravitatorio (potencial eléctrico vs potencial gravitatorio)



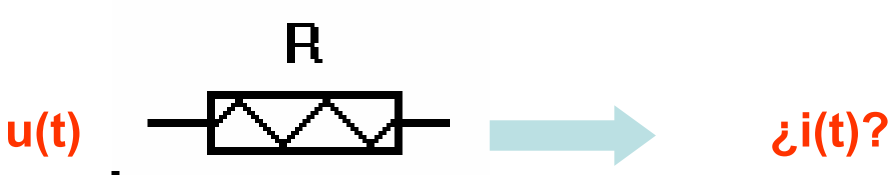
  - El dipolo (masa puntual) gana energía potencial que genera el dipolo (conservación de energía)



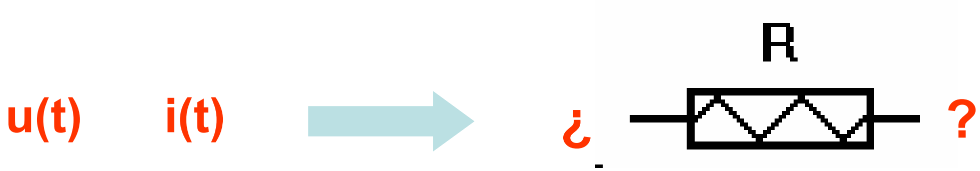
  - Si obtenemos $p(t_1) < 0$ en un t_1, "tranquilos", nos hemos equivocado y consume potencia. Se cumple la "Ley de Murphy"

Problemas en Teoría de Circuitos

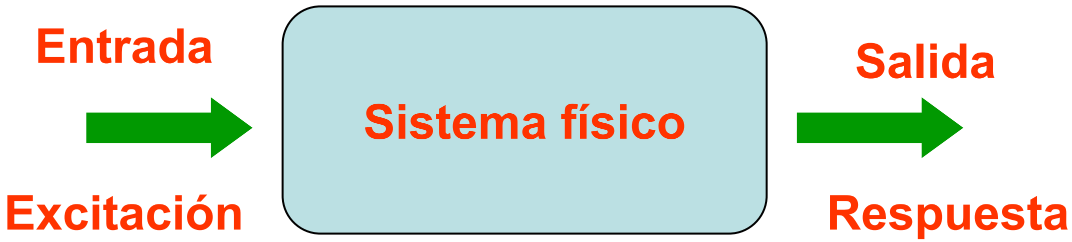
- Análisis de Circuitos: conocemos la excitación (u(t) o i(t)), el circuito (sistema) (R=10Ω) y queremos conocer la respuesta (i(t) o u(t))



- Síntesis de Circuitos: conocemos la excitación (u(t) o i(t)) y la respuesta (i(t) o u(t)), ¿qué circuito/sistema hace éso y cómo están conectados sus componentes entre sí?



- Sistemas físicos: nomenclatura



Las Leyes de Kirchoff

- Son axiomas, no vamos a demostrarlos
- Primera Ley
  - Conservación de la carga eléctrica.

$$\sum_{k \subset salen} i_k(t) = \sum_{m \subset entran} i_m(t)$$

- Segunda Ley
  - Trabajo/energía necesaria al desplazar una carga en un campo eléctrico. En un circuito cerrado volvemos al punto origen y no ha ganancia/defecto de energía.

$$\sum_{k \subset lazo} u_k(t) = 0$$

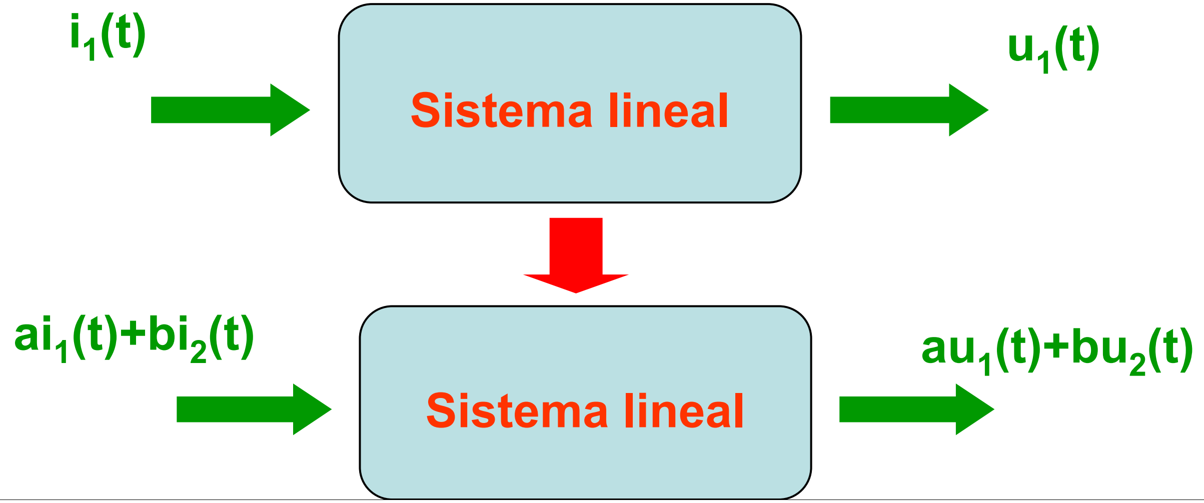
Linealidad

- Es una hipótesis básica en circuitos. La linealidad, usualmente la entendemos como proporcionalidad, en ingeniería supone que el dipolo responde a una ecuación diferencial lineal como la siguiente:

$$u(t) = R * i(t) + L * \frac{di(t)}{dt}$$

- Si al sistema (dipolo/circuito) le aplicamos una excitación compuesta como a*i_1(t)+b*i_2(t), (a,b reales) responderá con una proporcionalidad de la respuesta individual a i1(t) e i2(t)

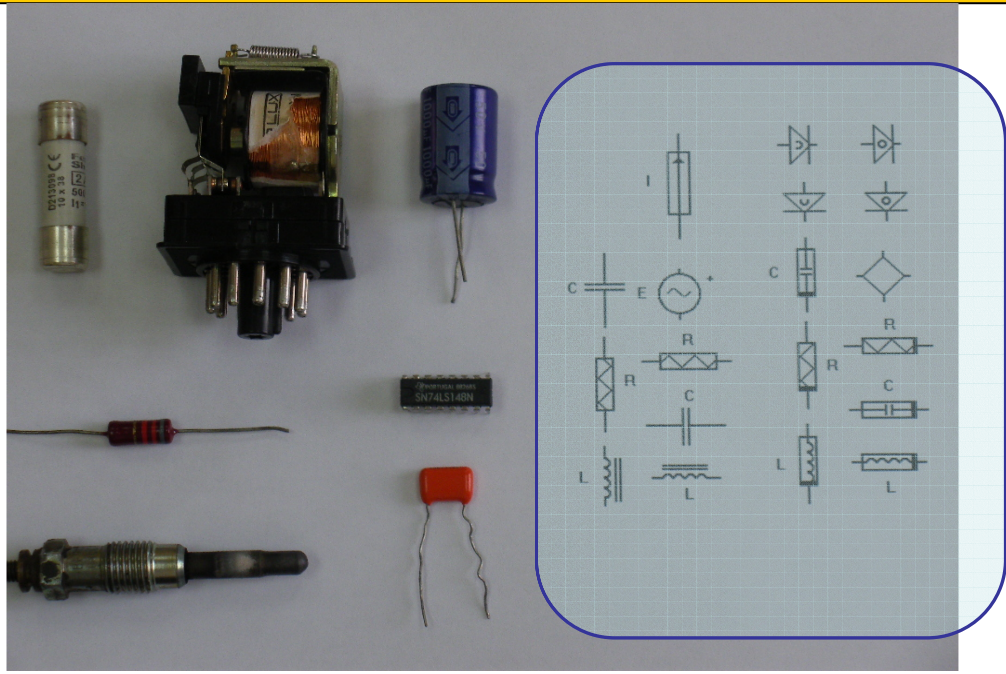
$$u(t) = R[ai_1(t) + bi_2(t)] + L\frac{d[ai_1(t) + bi_2(t)]}{dt} = a\left[i_1(t) + L\frac{di_1(t)}{dt}\right] + b\left[i_2(t) + L\frac{di_2(t)}{dt}\right]$$



- **Elementos de los circuitos: modelos**
  - Todos hemos empleado modelos alguna vez:
    - Masa puntual (mecánica).
    - Recipiente adiabático (termodinámica).
    - Carga puntual (electrostática).
    - Tirantes/barras sin masa (resistencia de materiales).
  - Los modelos son más o menos sencillos, lo importante es:
    - Comprender el proceso físico que representan.
    - Saber cuándo se aplican.
    - Conocer sus limitaciones (y errores).
- **En análisis de circuitos estableceremos**
  - Modelos ideales: los más sencillos.
  - Modelos reales: más complejos.

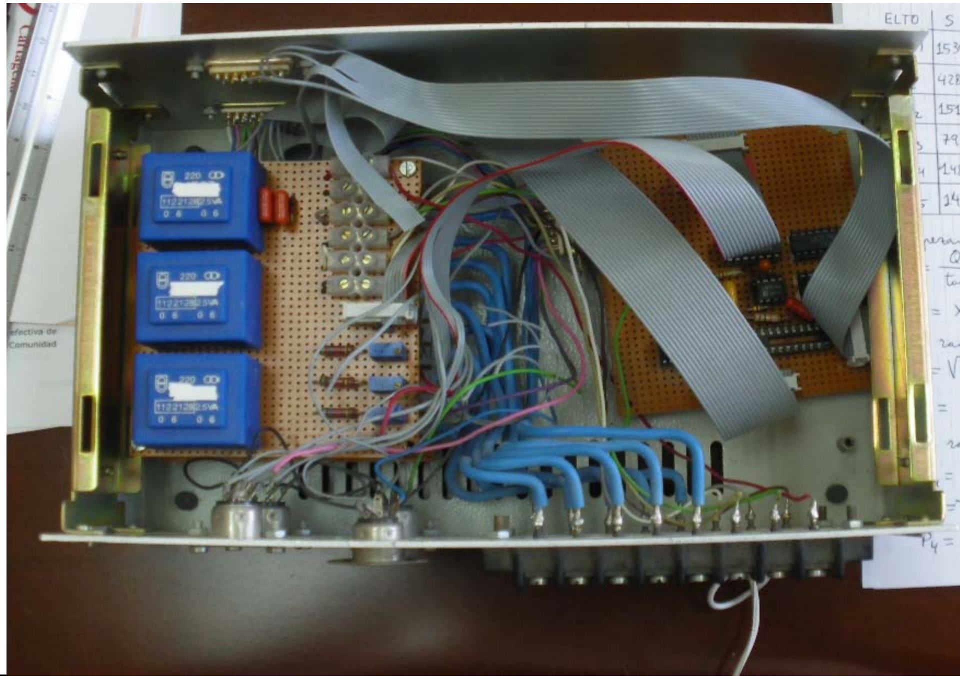
Algunos elementos físicos que vamos a modelar

Realidad



Modelo

Realidad



Modelo “Agregado”

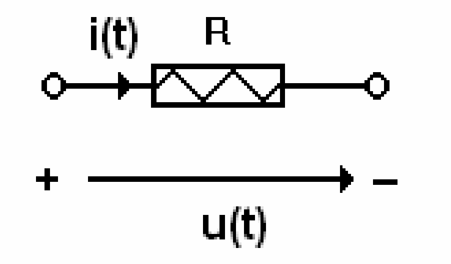
Modelos de dipolos:

- Resistencia
- Inductancia
- Condensador
- Interruptor
- Conmutador
- Fuentes de tensión e intensidad independientes
- Fuentes de tensión e intensidad dependientes
- Bobinas acopladas magnéticamente
- Transformador

Resistencia

- Físicamente: un conductor, una lámpara incandescente, una radiador, un termo eléctrico, un calentador de motor diesel..

- Representación en circuitos:



- Ecuación de definición (modelo ideal):

$$u(t) = Ri(t); i(t) = Gu(t)$$

- R es la resistencia (valor óhmico en Ω). Su recíproco es la conductancia G que se mide en S (Siemens). Para un conductor de una cierta longitud (l) y sección (S) viene dado por la expresión:

$$R = \rho(\Omega mm^2 / m)\frac{l(m)}{S(mm^2)}$$

- **Siendo ρ la resistividad del material. Por ejemplo**
  - Propiedades de conductores y aislantes

Sustancia/material	ρ (Ωm)	ρ (Ωmm²/m)
Aluminio	$2{,}63 \times 10^{-8}$	1/38
Cobre (recocido)	$1{,}72 \times 10^{-8}$	1/58
Carbón	3500×10^{-8}	
Hierro	10×10^{-8}	
Latón (Cu+Zn)	7×10^{-8}	
Baquelita	$[2 \times 10^{5}, 10^{11}$	
Mica	$[10^{11}, 10^{15}$	
Vidrio	$[10^{11}, 10^{14}$	

- **Las resistencias (II)**
- **Potencia instantánea p(t) (criterio de consumo)**

$$p(t) = u(t)i(t) = \frac{u^2(t)}{R} = Ri^2(t)W$$

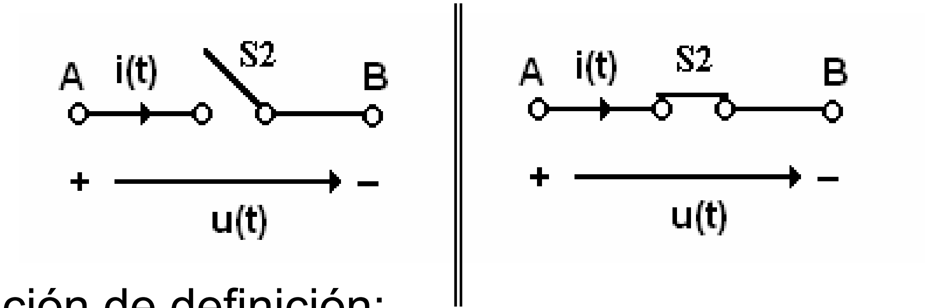
  - Podemos decir que es positiva pues es independiente de los valores + ó - de u(t) e i(t).
- **Energía w(t)**

$$w(t) = w(t_0) + \int_{to}^{t} p(\tau)d\tau = w(t_0) + \int_{to}^{t} Ri^2(\tau)d\tau$$

  - Esa energía se emplea en producir calor, luz, …
  - Es una cantidad creciente (salvo que p(t) sea nula)

- **Interruptor**
  - Físicamente: cualquier elemento de corte/conexión de la corriente eléctrica en nuestra casa, el automóvil, ..
  - Representación en circuitos:

$t < t_0$



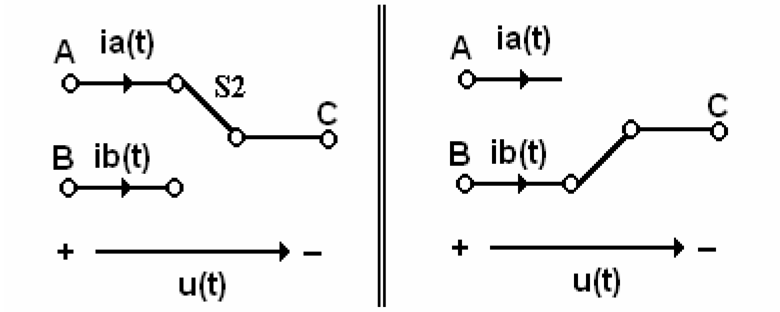
$t \geq t_0$

  - Ecuación de definición:

$$u(t) = ¿?; i(t) = 0A; t < t_0 \qquad u(t) = 0V; i(t) = ¿?\,A; t \geq t_0$$

- **Conmutador**

t < to



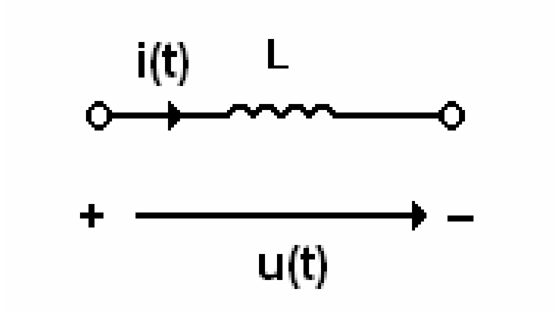
t ≥ to

  - Ecuación de definición

$$u_{AC}(t) = 0; i_{AB}(t) = ¿?\,A; i_{BC}(t) = 0; t < t_0$$

Bobina (inductancia)

- Físicamente: conductores de una línea eléctrica, electroimán, devanado de un motor, transformador, reactancia de lámparas..
- Representación en circuitos (L: inductancia (H))



- Ecuación de definición (modelo ideal):

$$u(t) = L\frac{di(t)}{dt};\mathrm{Re}\,cordatorio \rightarrow u(t) = N\frac{d\Phi(t)}{dt};L = \frac{N\Phi(t)}{i(t)}$$

- Existe una versión integral de la ecuación:

$$i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L}\int_{to}^{t} u(\tau)d\tau$$

- **Las inductancias (II)**
- **Potencia instantánea p(t)**

$$p(t) = u(t)i(t) = L\frac{di(t)}{dt}i(t) = Li(t)\frac{di(t)}{dt}W$$

  - No podemos decir si es positiva (consumida) o negativa (generada), depende de los valores de i(t) y su derivada en cada t.

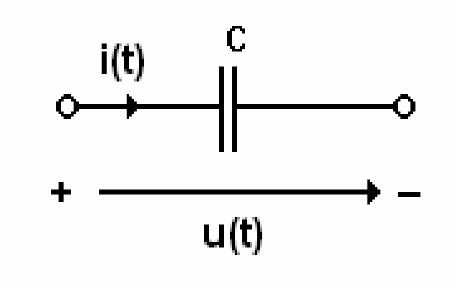
- **Energía w(t)**

$$w(t) = w(t_0) + \int_{to}^{t} p(\tau)d\tau = w(t_0) + \int_{to}^{t} i(\tau)Ldi(\tau) \Rightarrow w(t) - w(t_0) = \frac{1}{2}L\left[i^2(t) - i^2(t_0)\right]J$$

  - Depende de los valores absolutos iniciales y finales de la intensidad, no de su evolución intermedia (que veremos en el análisis temporal)
  - Esa energía se emplea en crear/aumentar el campo magnético (si absorbe energía del circuito)

Condensador

- Físicamente: conductores de una línea eléctrica y sus aislantes, dispositivos de laboratorio.
- Representación en circuitos



- Ecuación de definición (modelo ideal, si C constante):

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{d[C(t)u(t)]}{dt} = C\frac{du(t)}{dt}$$

- C es la capacidad (F) de ese elemento. Existe una versión integral de la ecuación:

$$u(t) = u(t_0) + \frac{1}{C}\int_{to}^{t} i(\tau)d\tau$$

ÍNDICE

- **El condensador (II)**
- **Potencia instantánea p(t)**

$$p(t) = u(t)i(t) = u(t)C\frac{du(t)}{dt} = Cu(t)\frac{du(t)}{dt}W$$

  - No podemos decir si es positiva (consumida) o negativa (generada), depende de los valores de u(t) y su derivada en cada t.

- **Energía w(t)**

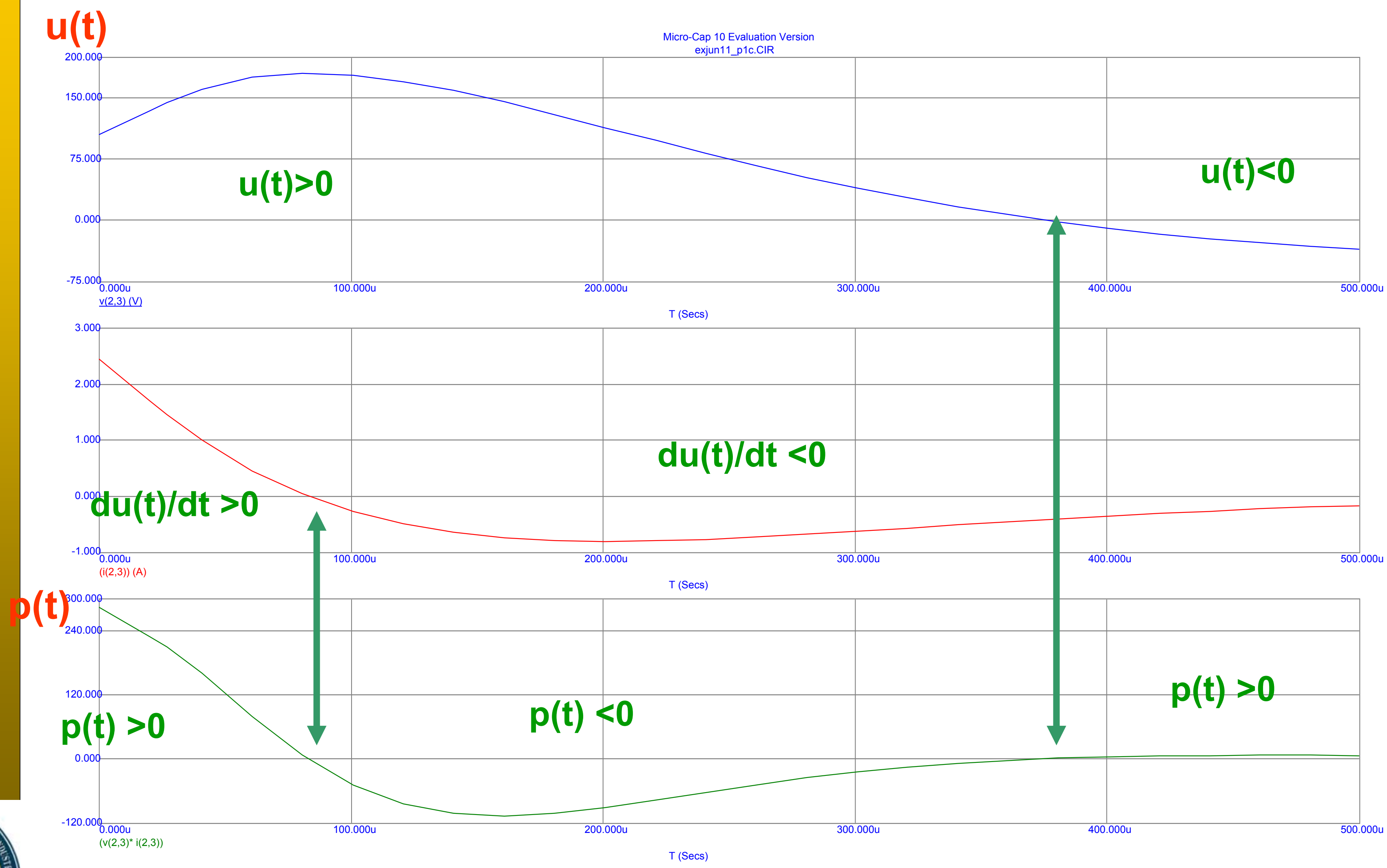
$$w(t) = w(t_0) + \int_{to}^{t} p(\tau)d\tau = w(t_0) + \int_{to}^{t} u(\tau)Cdu(\tau) \Rightarrow w(t) - w(t_0) = \frac{1}{2}C\left[u^2(t) - u^2(t_0)\right]J$$

  - Depende de los valores absolutos iniciales y finales de la tensión, no de su evolución intermedia (que veremos en el análisis temporal).
  - La energía que se **absorbe** del circuito se emplea en crear el campo eléctrico entre los conductores y armaduras. Si se **genera** energía, ésta proviene de ese campo eléctrico creado previamente

ÍNDICE

Ejemplo: p(t) en un condensador en evolución temporal

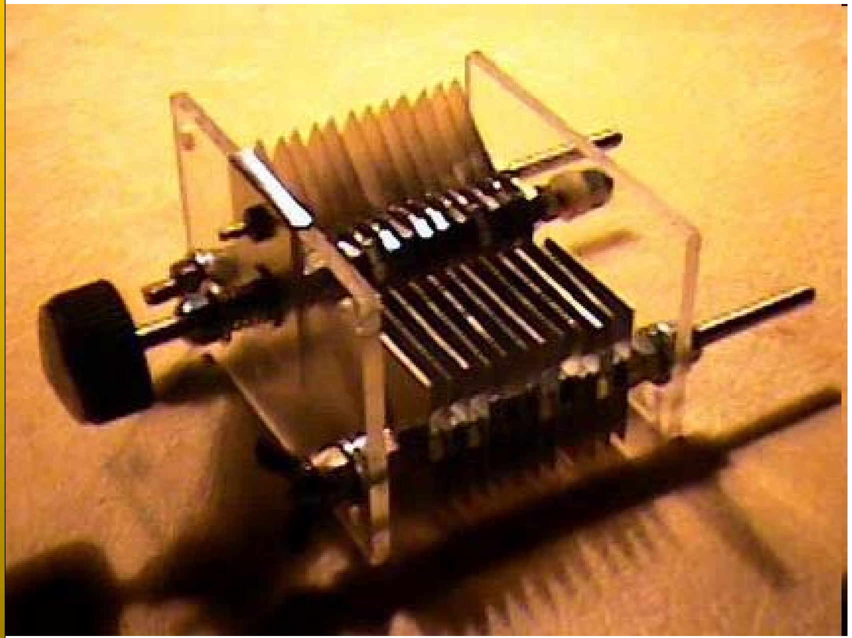
- Figure source:MicroCap9



ÍNDICE

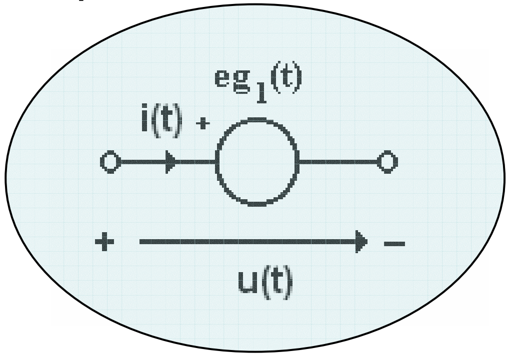
Condensadores de C variable: C(t)

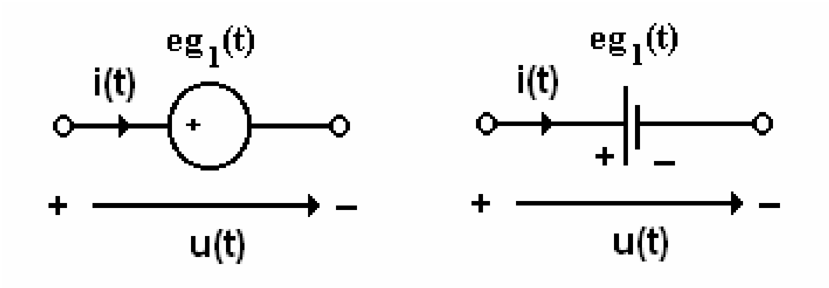
- Figure source: http://www.eham.net/articles/5217. Construcción de un condensador de C variable.



Fuentes de tensión

- Físicamente: pila, batería, alternador de automóvil, central eléctrica, un enchufe,...
- Representación en circuitos





Anglosajón

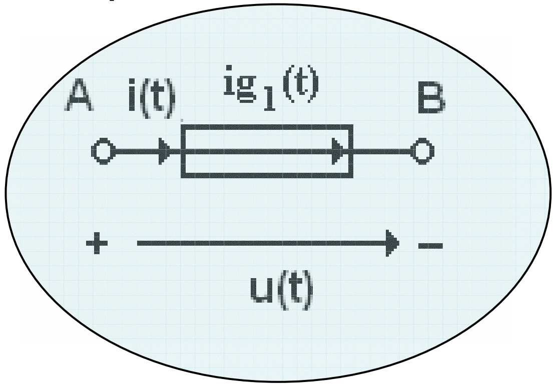
- Ecuación de definición:
  - La intensidad depende de los elementos a que se conecte la fte

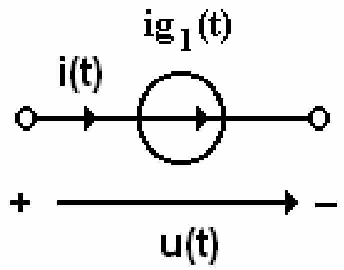
$$u(t) = eg_1(t); i(t) = ¿?$$

- eg(t) es la función que caracteriza la tensión de la fuente (una constante, una senoide, una recta, un triángulo, etc): **es dato**
- El signo + nos indica dónde está el terminal positivo si eg(t)>0

Fuentes de intensidad

- Físicamente: no son tan frecuentes, son dispositivos electrónicos, pero son útiles en circuitos (lo veremos …)
- Representación en circuitos





Anglosajón

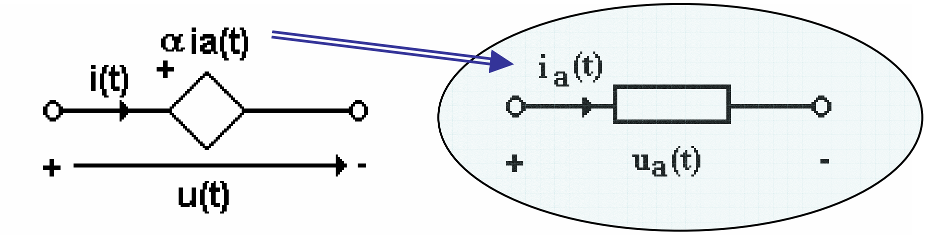
- Ecuación de definición:
  - La tensión u(t) depende de los elementos a que se conecte la fte

$$i(t) = ig_1(t); u(t) = ¿?$$

- ig(t) es la función que caracteriza la tensión de la fuente (una constante, una senoide, una recta, un triángulo, etc): conocida
- La flecha dentro del símbolo ► nos indica hacia dónde se bombea carga positiva si ig(t)>0

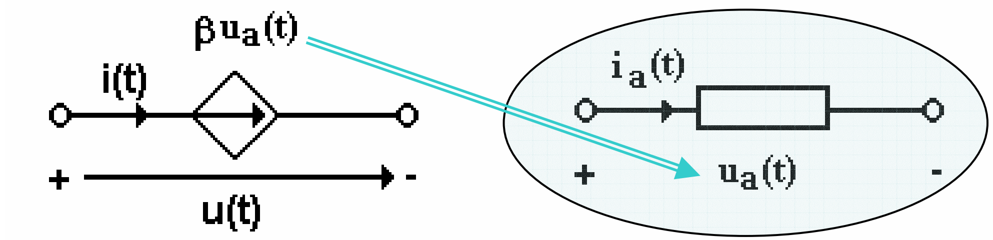
Fuentes dependientes

- El valor correspondiente a eg(t) o ig(t) en las fuentes independientes no es conocido, depende de una tensión o intensidad en otra parte del circuito.
- Fuentes dependientes de tensión



$$u(t) = \alpha i_a(t); \alpha(\Omega)$$

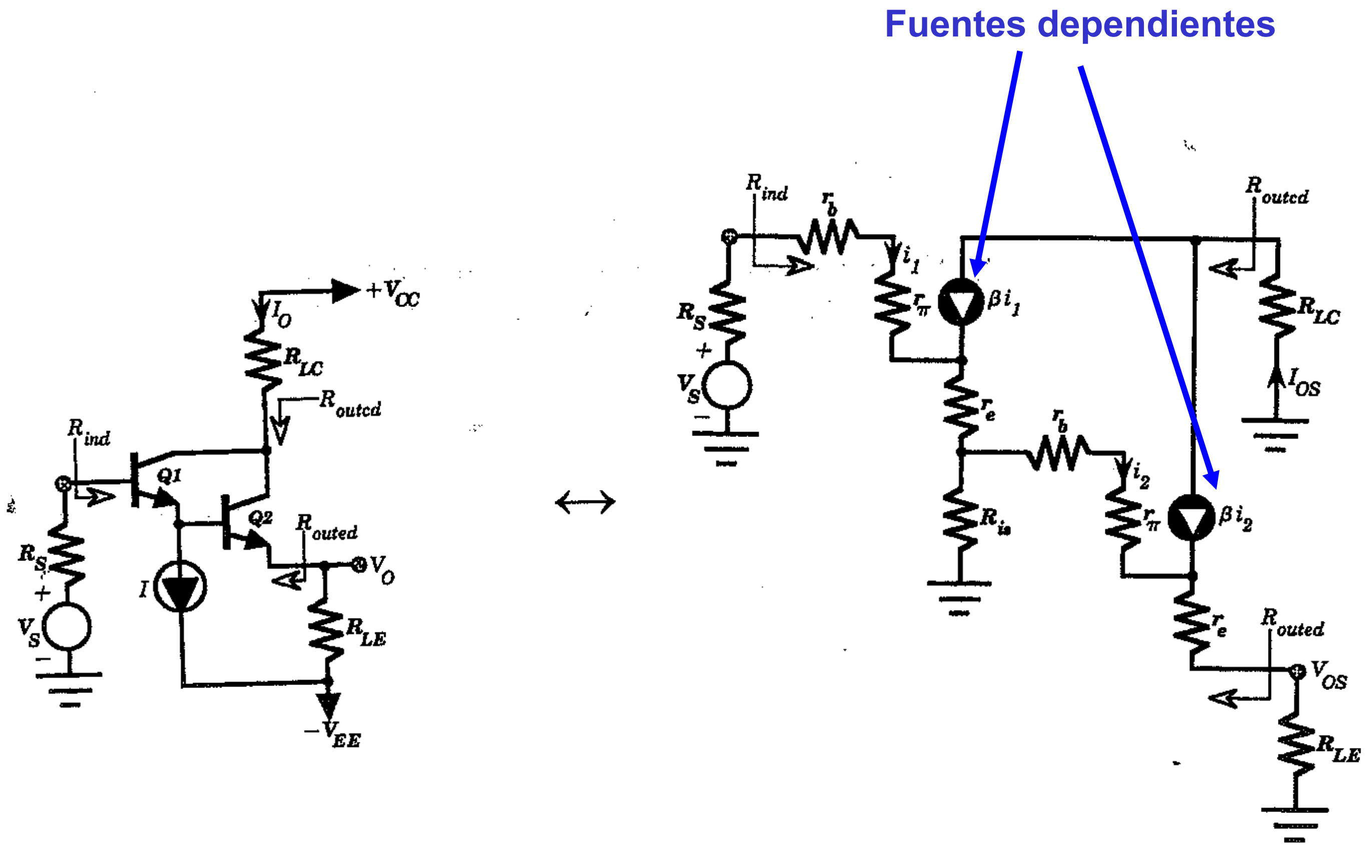
- Fuentes dependientes de intensidad



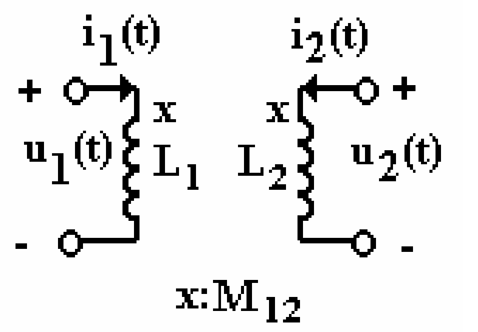
$$i(t) = \beta u_a(t); \beta(S)$$

- Corresponden a modelos de eltos. Electrónicos (ej. Transistores)

- **Ejemplo de modelado con fuentes dependientes**
  - Amplificador Darlington y su equivalente en “pequeña señal”.
  - Figure source: W.K. Chen “Circuits and Filters Handbook”.



- **Cuadripolos**
- **Bobinas acopladas magnéticamente**
  - Los campos creados por la intensidad de una bobina ideal atraviesan otra bobina “cercana”.
  - Físicamente: conductores de una línea sobre otra línea, emisor-antena, bobinados rotor-estator de un motor.
  - Representación:



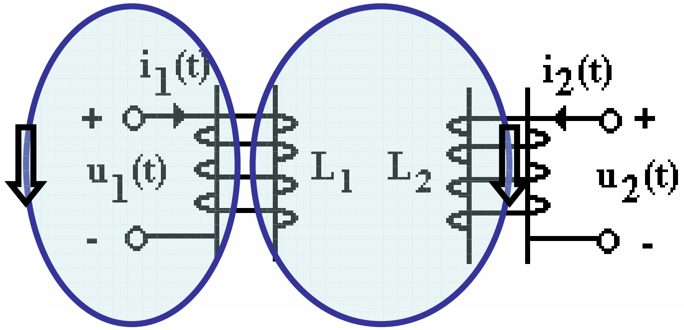
  - L_i: inductancias de cada bobina (H), M_{ij}: coef de acoplamiento (H)
- **Ecuaciones de definición:**
  - Intervienen las dos tensiones y las dos intensidades

$$u_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} \pm M_{12} \frac{di_2(t)}{dt} \qquad u_2(t) = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} \pm M_{12} \frac{di_1(t)}{dt}$$

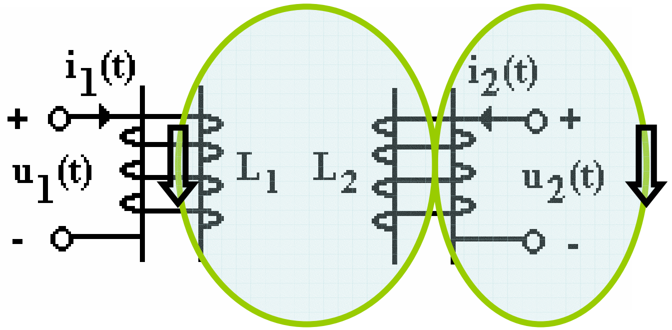
  - El signo del acoplamiento depende de “x” y sentidos de las inensidades respecto a “x” (terminales correspondientes)

Bobinas acopladas magnéticamente (II)

- Deducción de las ecuaciones: evaluación del campo (regla de la mano derecha).
  - Campo/flujo creado por i1(t)



  - Campo/flujo creado por i2(t)

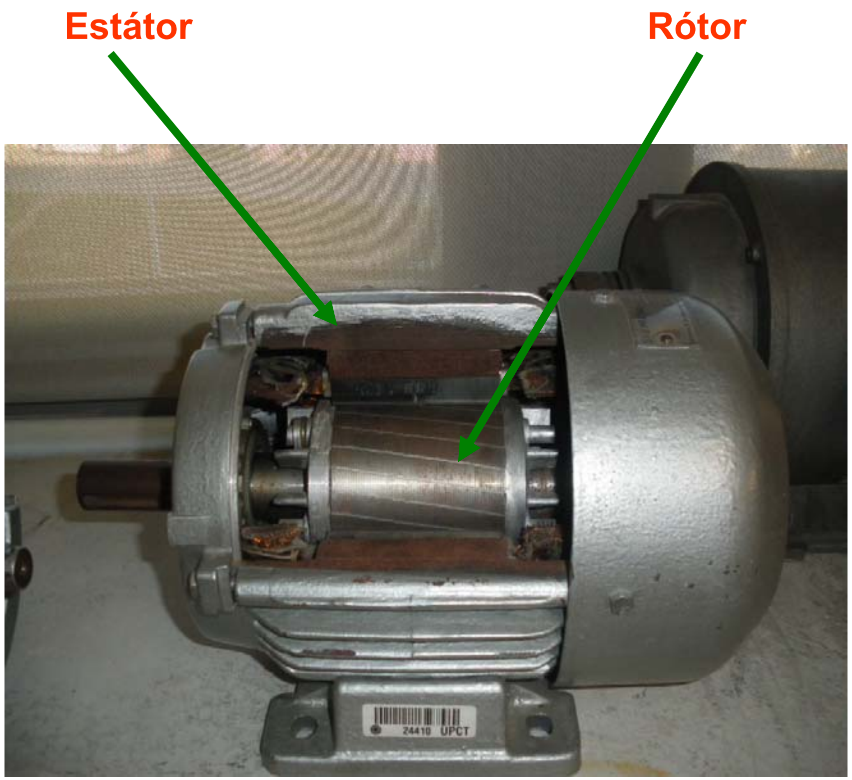


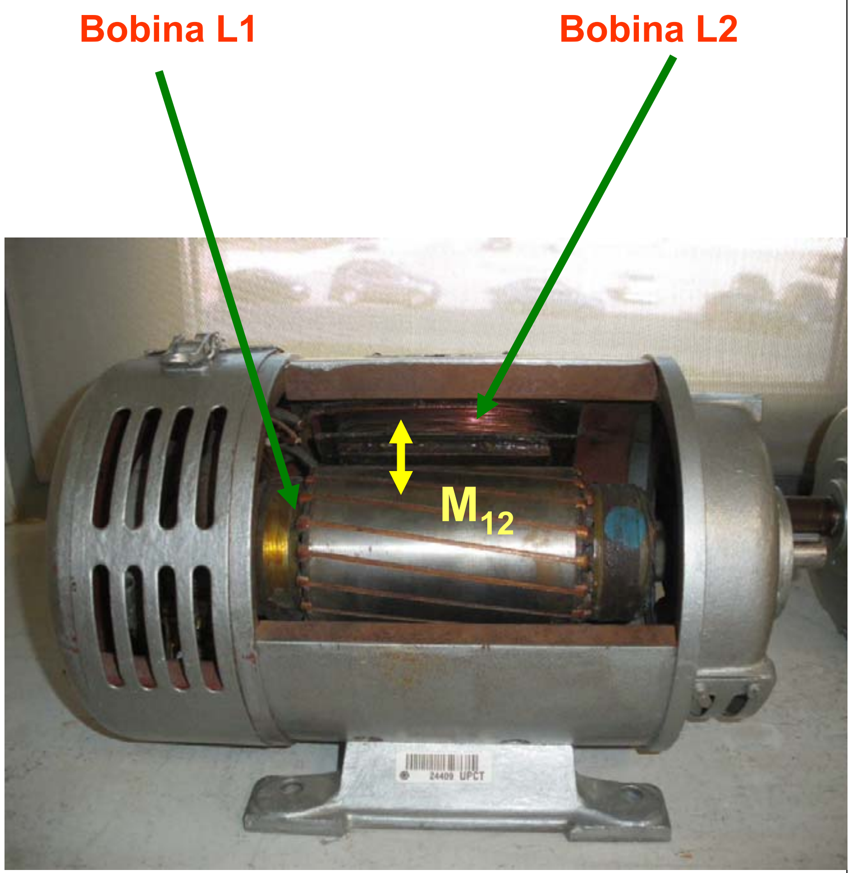
- Flujo total y tensión (p.e. en la bobina 1)

$$u_1(t) = N_1 \left[\frac{d\Phi_{11}(t)}{dt} + \frac{d\Phi_{12}(t)}{dt} + \frac{d\Phi_{21}(t)}{dt} \right]$$

Ejemplo de bobinas acopladas

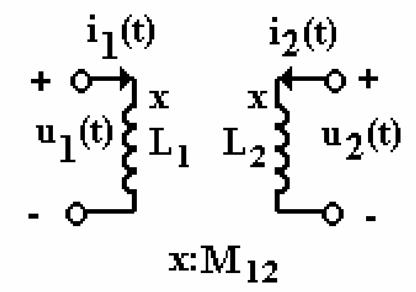
- Los devanados del rótor (pieza giratoria) y estátor (pieza fija) de un motor o generador eléctrico.





Bobinas acopladas magnéticamente (III)

- Potencia: la de cada una de ellas



$$p(t)=u_1(t)i_1(t)+u_2(t)i_2(t)=L_1 i_1\frac{di_1}{dt}+M_{12}i_1\frac{di_2}{dt}+L_2 i_2\frac{di_1}{dt}+M_{12}i_2\frac{di_1}{dt}$$

$$\left.\begin{aligned} u_1(t)&=L_1\frac{di_1(t)}{dt}+M_{12}\frac{di_2(t)}{dt}\\ u_2(t)&=L_2\frac{di_1(t)}{dt}+M_{12}\frac{di_1(t)}{dt}\end{aligned}\right\}$$

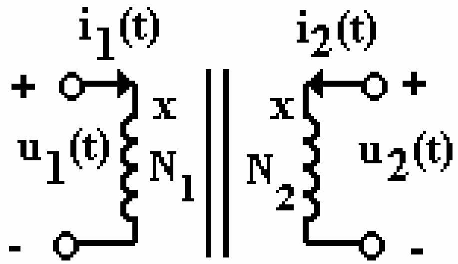
- Energía: integramos la potencia

$$w(t)-w(t_0)=\int_{to}^{t}p(t)dt=\int_{to}^{t}\left[L_1 i_1\frac{di_1}{dt}+M_{12}i_1\frac{di_2}{dt}+L_2 i_2\frac{di_1}{dt}+M_{12}i_2\frac{di_1}{dt}\right]dt=$$

$$=\int_{to}^{t}\left[L_1 i_1 di_1+L_2 i_2 di_2+M_{12}d(i_1 * i_2)\right]=\frac{1}{2}L_1 i_1^2(t)\Big|_{to}^{t}+\frac{1}{2}L_2 i_2^2(t)\Big|_{to}^{t}+M_{12}i_1(t)i_2(t)\Big|_{to}^{t}$$

- Ojo: el último término depende de los sentidos de las intensidades sobre los terminales correspondientes

- **Cuadripolos**
- **Transformador ideal**
  - Es un caso particular de bobinas acopladas:
    - El medio de acoplamiento es un material ferromagnético (acero)
    - La permeabilidad del medio se supone infinita.
    - No existe histéresis magnética, ni pérdidas por corrientes de Foucault
  - Físicamente: un transformador.
  - Representación:



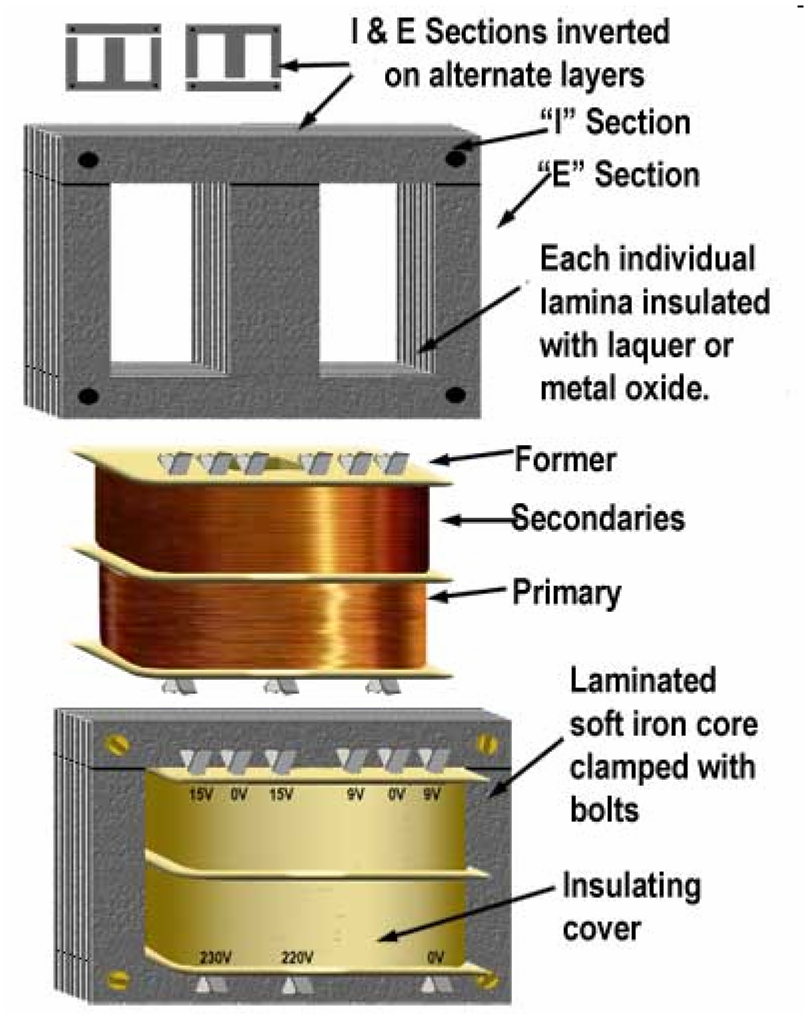
  - N_i: número de espiras de los devanados
- **Ecuaciones de definición:**
  - Intervienen las dos tensiones y las dos intensidades

$$\frac{u_1(t)}{u_2(t)} = \frac{N_1}{N_2}; \frac{i_1(t)}{i_2(t)} = -\frac{N_2}{N_1}$$

  - El signo de las ecuaciones depende de “x” y sentidos de las inensidades y tensiones respecto a “x” (terminales correspondientes)

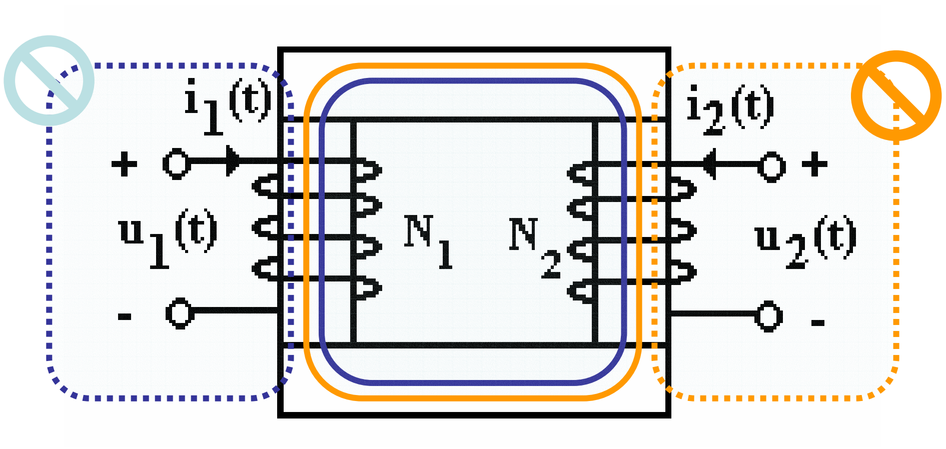
Esquema de un transformador (clase)

- Figure source: www.learnabout-electronics.org



Transformador ideal (II)

- Evaluación del campo (regla de la mano derecha).
  - Campo/flujo creado por i1(t) e i2(t)



  - No existen flujos de dispersión (flujos externos al núcleo)

- Flujo total y tensión (p.e. en la bobina 1)

$$u_1(t) = N_1\left[\cancel{\frac{d\Phi_{11}(t)}{dt}} + \frac{d\Phi_{12}(t)}{dt} + \frac{d\Phi_{21}(t)}{dt}\right]$$

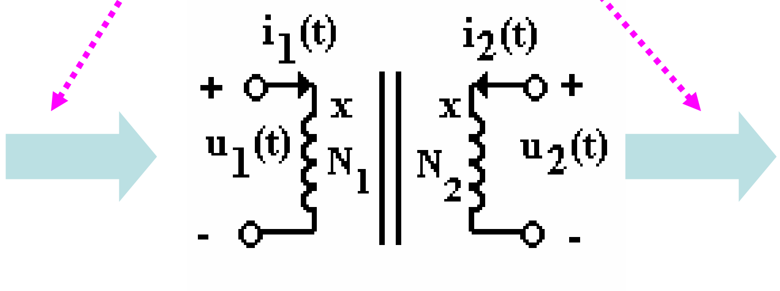
$$u_2(t) = N_2\left[\cancel{\frac{d\Phi_{22}(t)}{dt}} + \frac{d\Phi_{21}(t)}{dt} + \frac{d\Phi_{12}(t)}{dt}\right]$$

Potencia del transformador ideal

- La suma de las potencias consumidas por cada bobina

$$p(t) = u_1(t)i_1(t) + u_2(t)i_2(t) = u_1(t)i_1(t) + \left(\frac{N_2}{N_1}\right)u_1(t)\left(-\frac{N_1}{N_2}\right)i_1(t) = 0$$

-1 (sentido)

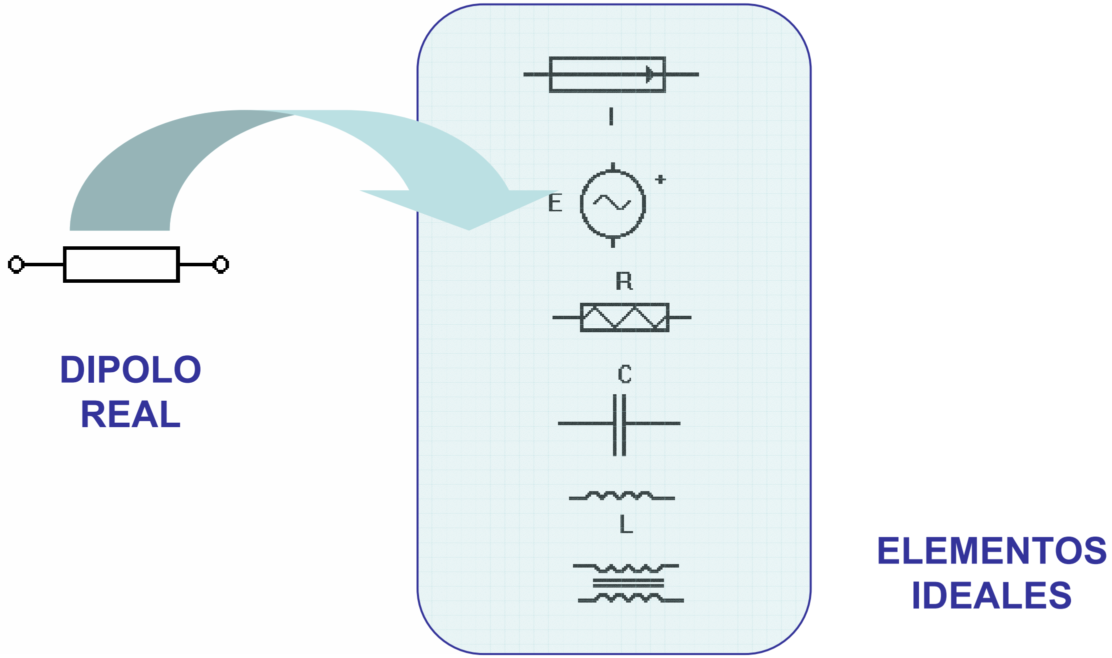


- La potencia es nula. Sólo se transfiere energía y potencia de un bobinado (primario) al otro (secundario).
- Relación de intensidades (aplicamos el Teorema de Ampère en el interior del núcleo ideal. ¡OJO!¡Sentidos de las intensidades!)

$$\cancelto{0}{\oint_{nucleo} H dl} = \sum_{espira \in nucleo} i_{espira} = N_1 i_1(t) + N_2 i_2(t) \Rightarrow \frac{i_1(t)}{i_2(t)} = -\frac{N_2}{N_1}$$

Modelos reales

- Preguntas:
  - ¿Qué falla en el modelo ideal? Experiencia en el laboratorio.
  - ¿Qué aspectos (fenómenos físicos) no hemos tenido en cuenta?
- Respuesta:
  - Complicamos, ampliamos o acotamos la validez del modelo ideal
- En general, combinaremos varios modelos ideales para general y aproximarnos al modelo real del dipolo.

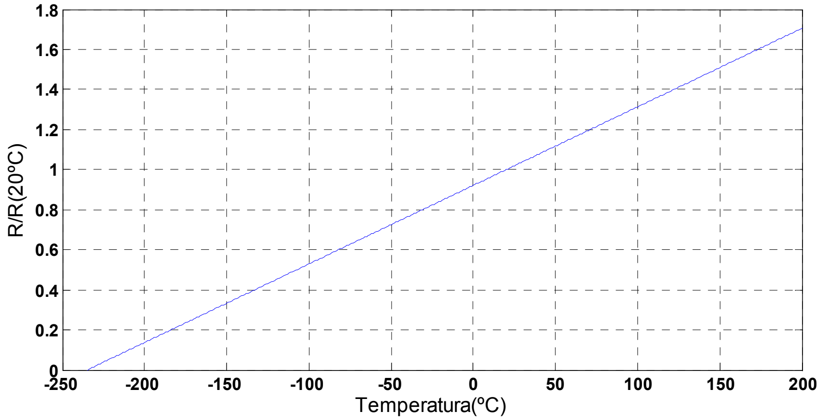


ÍNDICE

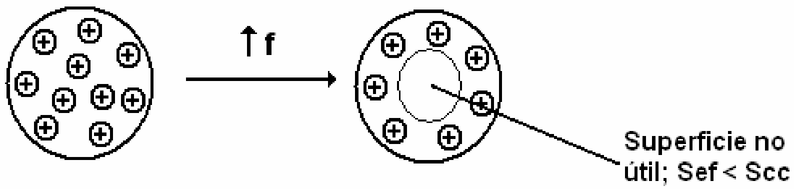
Resistencia real

- La resistividad depende de la temperatura: aumenta en función lineal de ésta (a bajas temperaturas los materiales se convierten en superconductores). Para el cobre (a temperatura θ):

$$\frac{R(\theta_1)}{R(\theta_2)} = \frac{\rho(\theta_1)}{\rho(\theta_2)} = \frac{\theta_1 + 235}{\theta_2 + 235}$$



- Efecto pelicular:
  - a medida que aumenta la frecuencia de la i(t) se crea flujo magnético variable que se opone a la circulación de la corriente. En las capas más internas hay más flujo y la densidad de corriente J(t) no es uniforme, siendo máxima en el exterior.



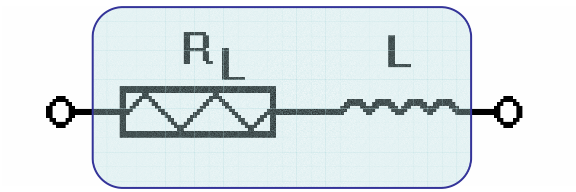
  - Tabulado en función de la frecuencia f, respecto a R en f=0Hz (Rcc):
    - Ref-ectiva(f)= Rcc*H(f, μ, ρ)
  - Aumenta el valor de R (Ref, resistencia efectiva)

Resistencia real

- Resistencias bobinadas: si trabajamos con resistencias bobinadas habrá un comportamiento inductivo (L).
  - ¿Cómo se puede reducir el efecto L?
- Tolerancias de fabricación (laboratorio): 5%, 10%, …
- Máxima intensidad (potencia): 100W…1W, 1/2W, 1/4W
  - Capacidad de disipación de calor del encapsulado o del propio conductor.

Inductancias

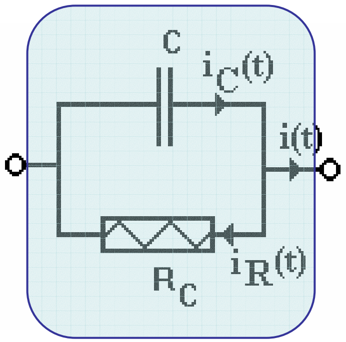
- Es el menos ideal de los elementos (laboratorio), siempre necesitaremos un conductor para que exista L ►► R_L
  - Factor de calidad de las bobinas $Q=wL/R_L$
  - A mayor frecuencia ($f=w/2\pi$) mayor importancia de L frente a R
- Tolerancias de fabricación.
- Intensidad máxima admisible (conductor).
- Modelo real:



Bobina real

Condensador

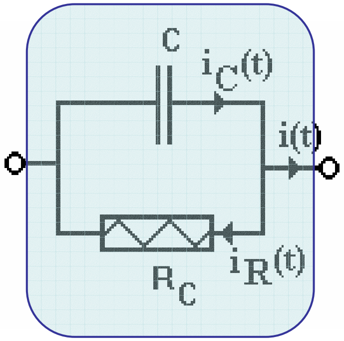
- Tolerancias de fabricación.
- Tensión máxima admisible: el dieléctrico soporta hasta un cierto valor de campo (gradiente de potencial).
- Descarga del condensador: un C ideal no se descarga nunca si está aislado, uno real si (laboratorio).
  - Ningún dieléctrico es 100% aislante► existen fugas, pérdidas.
- Modelo real:



condensador real

Condensador

- Descarga del C. Según el modelo real:



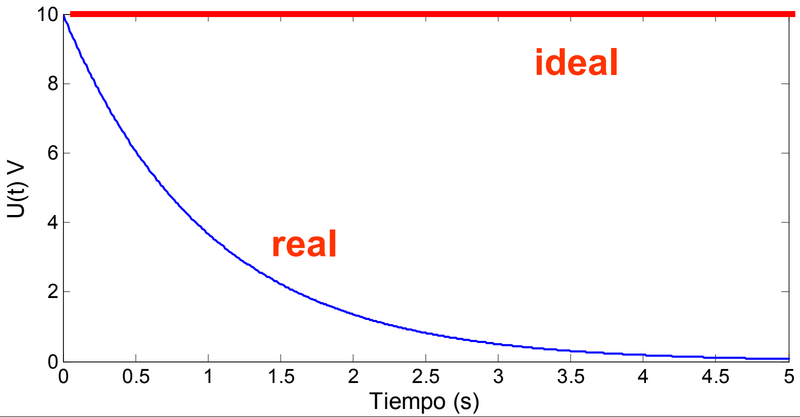
condensador real

- Condensador aislado: 2ª LK a la malla interna del condensador.

$$u_C(t)+u_R(t)=0;(i_R(t)=i_C(t)) \qquad u_C(t)+R_C i_C(t)=u_C(t)+R_C C\frac{du_C(t)}{dt}=0$$

- Ec. diferencial homogénea de primer order (coef. ctes)

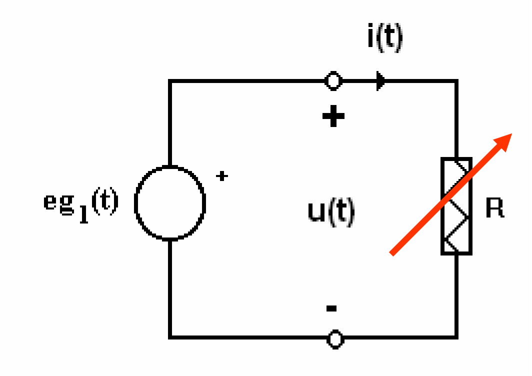
$$u_C(t) = u_C(t_0)e^{-\frac{1}{R_C C}(t-t_0)}$$



ÍNDICE

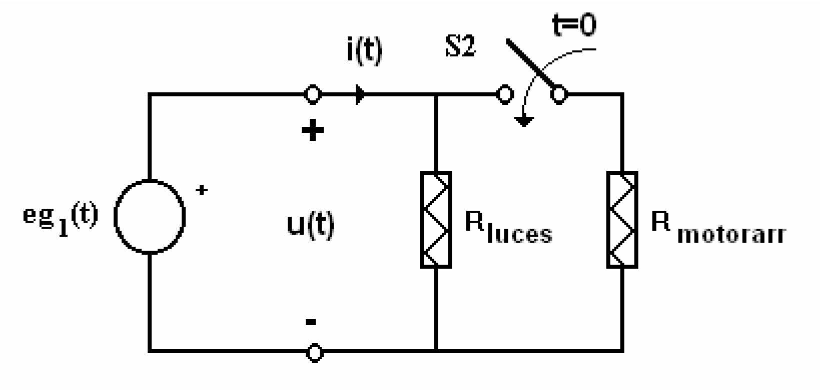
Fuente real de tensión

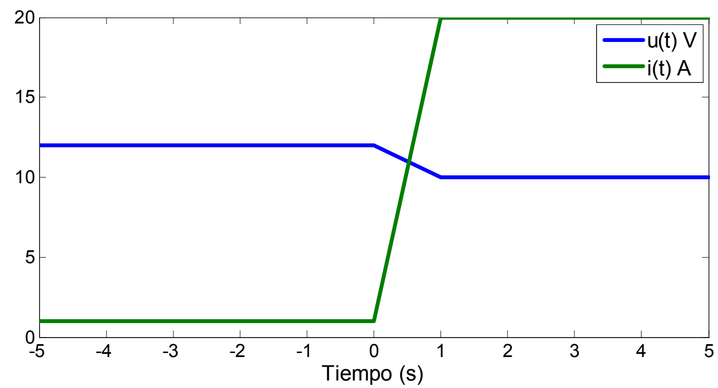
- Algo “falla” en el modelo. Supongamos el circuito:



$$i(t) = \frac{u(t)}{R} = \frac{eg_1(t)}{R}$$

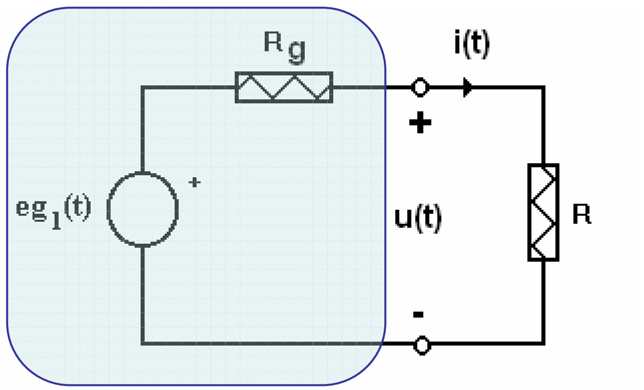
- Si reducimos el valor de R, i(t) puede crecer indefinidamente (¿∞?). Por experiencia sabemos que no es posible …(ej: una pila).
- Experiencia práctica: arranque de un coche con luces encendidas
  - La intensidad de las luces disminuye al conectar una carga (motor de arranque a la batería) ► una fuente real no mantiene la misma tensión (i.e. u(t)=g(i(t))).





Fuente real de tensión (II)

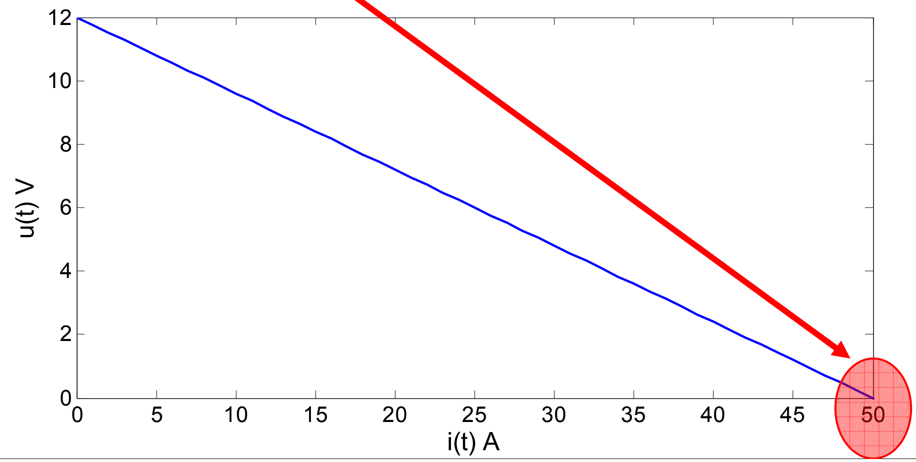
- ¿Cómo podemos modelar la caída de tensión al aumentar i(t)? ► ej. con una resistencia interna (Rg) (en general Rg y Lg)
- Vamos a ver el nuevo modelo y ecuación (de definición):



Fte. real

$$u(t) = eg_1(t) - R_g i(t)$$

- Consecuencias
  - i(t) está limitada (i_{max}) y por tanto la potencia que puede generar

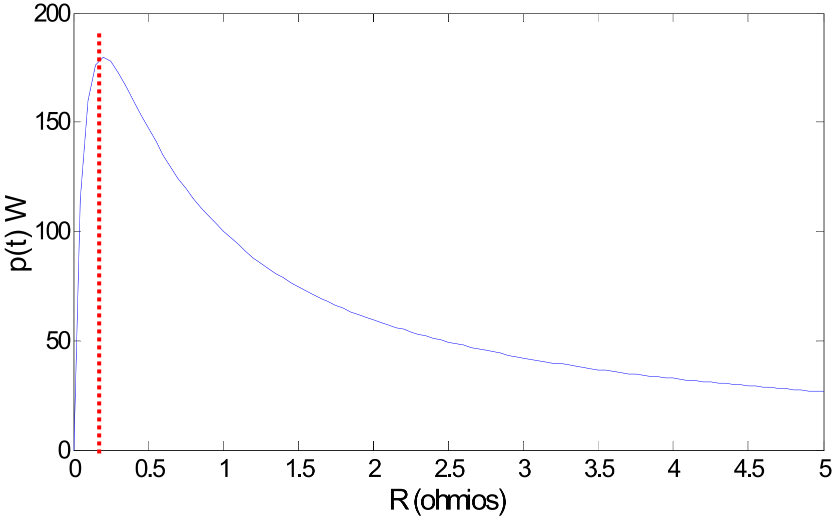


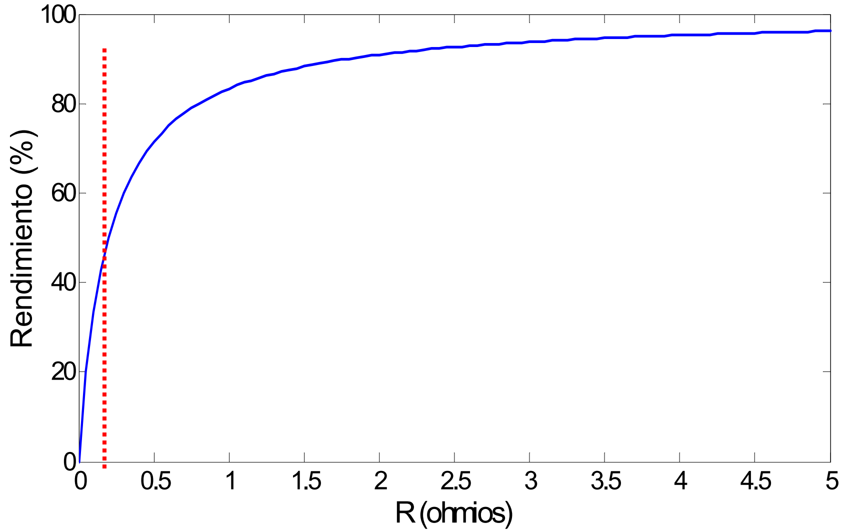
Fuente real de tensión (III)

- Potencia y potencia máxima (criterio de generación)

$$p(t) = u(t)i(t) = Ri^2(t) = R\frac{eg_1^2(t)}{(R+Rg)^2} \qquad p_{\max}(t) = \frac{eg_1^2(t)}{4Rg^2}$$

- Ejemplo: batería de eg(t)=12V con Rg=0.2Ω



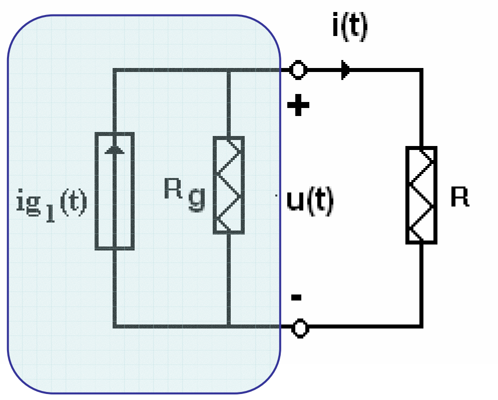


- Rendimiento energético

$$\eta = \frac{Ri^2(t)}{(R+R_g)i^2(t)} = \frac{Ri^2(t)}{e_{g1}(t)i\ \ (t)} = \frac{R}{R+R_g}$$

Fuente real de intensidad

- Tiene problemas similares con su magnitud dual (u(t))
  - Podemos suministrar tensiones infinitas con cargas R=0
- Modelo real: añadimos una resistencia Rg (y Lg en general), pero en **paralelo.**



Fte. real

$$i(t) = ig_1(t) - R_g u(t)$$

Transformador real

- Podemos incluir todo lo relativo a sus bobinas (que no son ideales) y además …
  - Los devanados tienen resistencia.
  - El núcleo real presenta histéresis magnética ► pérdidas
  - Existen corrientes parásitas en el núcleo ► pérdidas

- **Impedancia e impedancia operacional**
  - Operador D, y su inverso:

$$D = \frac{d}{dt}; \frac{1}{D} = \int dt$$

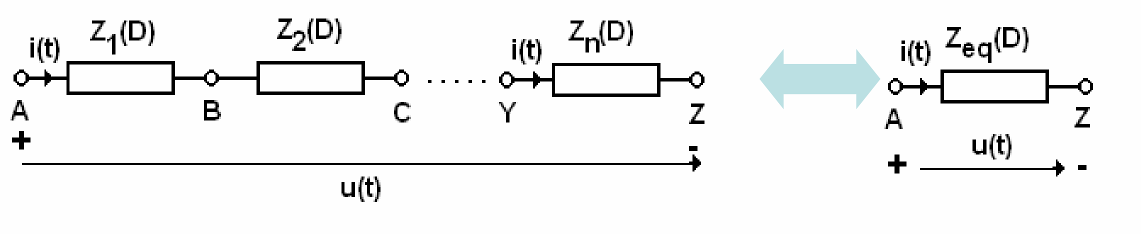
  - Impedancia Z: relación entre la tensión y la intensidad en un dipolo pasivo. Se mide en Ω.
  - Admitancia Y: relación entre la intensidad y la tensión en un dipolo pasivo Se mide en S.
- **Impedancias y admitancias operacionales: Z(D), Y(D)**
  - Aunque nos pueda parecer extraño el tratamiento de D como un coeficiente más, lo justificaremos en los temas III y IV,

Elemento	Ecuación	Z(D)	Y(D)
Resistencia	u(t)=Ri(t)	R	G
Inductancia	u(t)=LDi(t)	LD	1/LD
Condensador	i(t)=CDu(t)	1/CD	CD

Asociaciones de elementos: asociación serie

- La intensidad es la misma en todos los dipolos.
- Existe conexión eléctrica entre ellos.

Ecuaciones:



$$u(t) = u_{AB}(t) + u_{BC}(t) + u_{CD}(t) + \ldots + u_{YZ}(t) = Z_1(D)i_1(t) + Z_2(D)i_2(t) + \ldots + Z_n(D)i_n(t) = \sum_i Z_i(D)i(t)$$

Equivalente de la asociación:

- Es un elemento que reproduce el comportamiento, ecuación, de todo el conjunto (produce la misma tensión al circular la intensidad i(t)).

$$u(t) = \sum_i Z_i(D)i(t) = Z_{eq}(D)i(t) \Rightarrow Z_{eq}(D) = \sum_i Z_i(D)$$

Utilidad:

- Reducir la complejidad de un circuito.
- Obtener nuevos elementos pasivos de valores no comerciales.

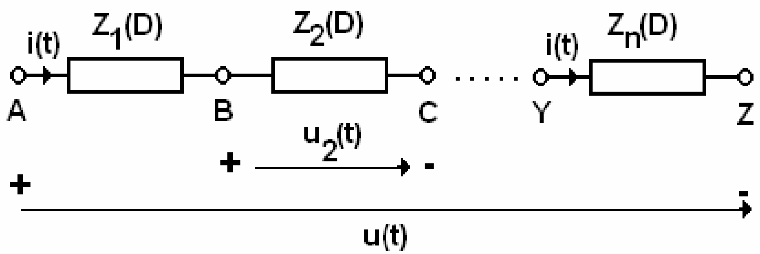
ÍNDICE

Asociaciones en serie (II)

Elementos	Equivalente	Utilidad
Resistencia	$R_{eq}=\Sigma R_i$	Resistencia mayor y de un valor óhmico no comercial.
Inductancia	$L_{eq}=\Sigma L_i$	Inductancia mayor y de un valor óhmico no comercial.
Condensador	$C_{eq}=1/\Sigma(1/C_i)$	Capacidad más pequeña que las Ci

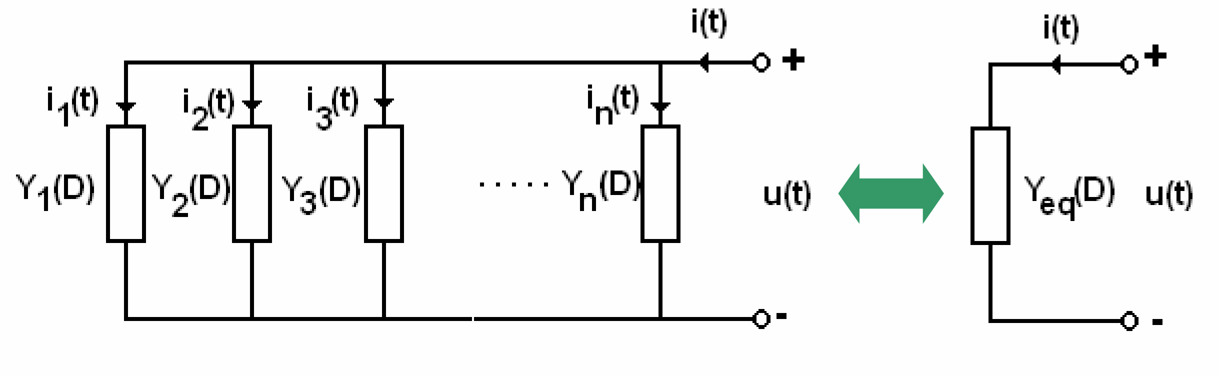
Divisor de tensión

- Conseguir una tensión más pequeña a partir de una dada.



$$u_2(t) = Z_2(D)i(t) = Z_2(D)\frac{u(t)}{Z_{eq}(D)} = \frac{Z_2(D)}{\sum_i Z_i(D)}u(t)$$

- **Asociaciones de elementos: asociación paralelo**
  - La tensión es la misma en todos los dipolos.
  - Existe conexión eléctrica entre ellos. Utilizaremos Y(D)
- **Ecuaciones:**



$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) + \ldots + i_n(t) = Y_1(D)u_1(t) + Y_2(D)u_2(t) + \ldots + Y_n(D)u_n(t) = \sum_i Y_i(D)u(t)$$

- **Equivalente de la asociación:**
  - Es un elemento que reproduce el comportamiento, ecuación, de todo el conjunto (produce la misma tensión al circular la intensidad i(t)).

$$i(t) = \sum_i Y_i(D)u(t) = Y_{eq}(D)u(t) \Rightarrow Y_{eq}(D) = \sum_i Y_i(D)$$

- **Utilidad:**
  - Reducir la complejidad de un circuito.
  - Obtener nuevos elementos pasivos de valores no comerciales.

ÍNDICE

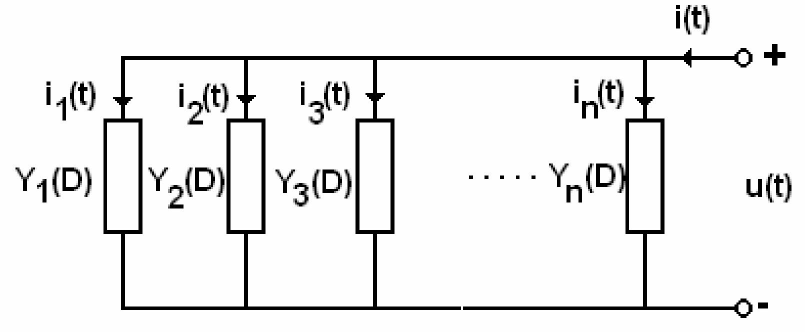
Asociaciones en paralelo (II)

Elementos	Equivalente	Utilidad
Resistencia	$R_{eq}=1/\Sigma(1/R_{i)}$	Resistencia menor y de un valor óhmico no comercial. Req de mayor potencia.
Inductancia	$L_{eq}=1/\Sigma(1/L_i)$	Inductancia menor y de un valor óhmico no comercial
Condensador	$C_{eq}=\Sigma/C_i$	Capacidad mayor y con más tensión máxima admisible que las Ci

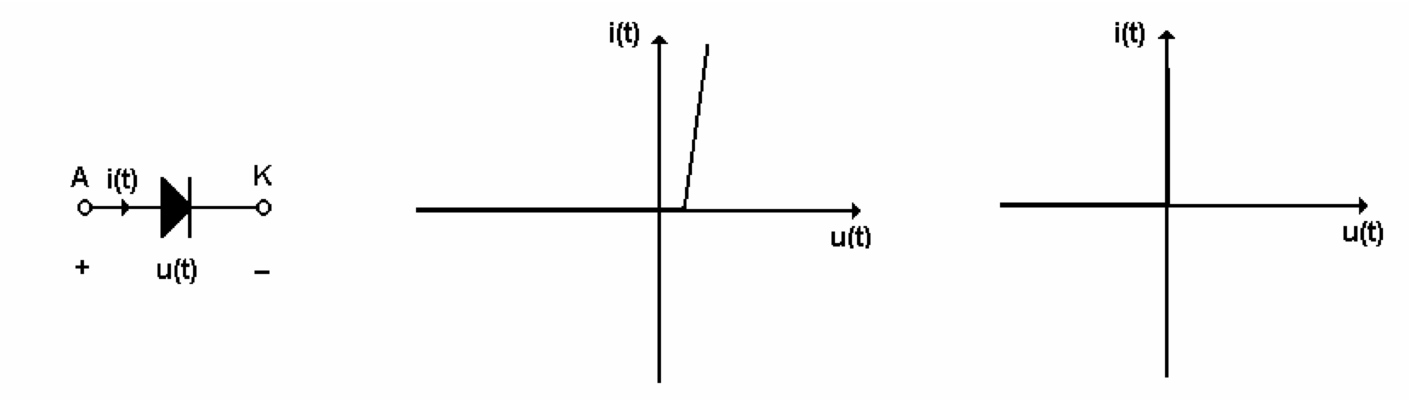
Divisor de intensidad

- Conseguir una intensidad más pequeña a partir de una dada.
  - Aplicación: aparatos de medida

$$i_2(t) = Y_2(D)u(t) = \frac{Y_2(D)}{\sum_i Y_i(D)} i(t); i_2 < i(t)$$



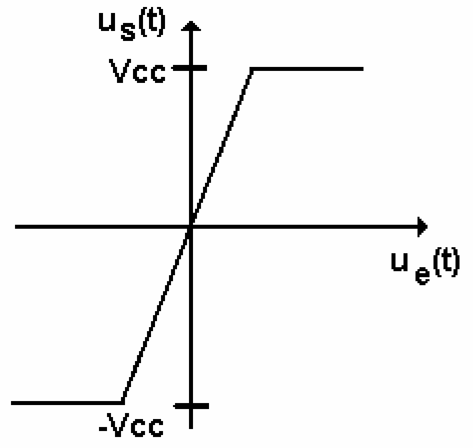
Elementos no lineales: diodos



- Básicamente se comporta como un interruptor cerrado o abierto según el sentido de la tensión:
  - Si u(t) > 0 ($V_A > V_K$): interruptor cerrado, existe i(t)
  - Si u(t) < 0 ($V_k > V_A$): interruptor abierto, no existe i(t) (i(t)=0)
- Es un ejemplo claro de elemento no lineal, unilateral
- Sirve para transformar tensiones "alternas" (senoidales) a tensiones "continuas" (constantes en el tiempo) en circuitos llamados rectificadores (ver ejemplos http://www.gestiondelademanda.es)

Elementos especiales: El amplificador operacional

- Es un elemento básico de otros circuitos (electrónicos)
- Permite realizar operaciones de suma, resta, multiplicación, integración,…, aparte de amplificación, filtrado de señales,…



Clasificación de los elementos

- Activos: fuentes de potencia (el proceso de conversión de energía puede ser reversible. Ej: baterías, máquinas eléctricas)
- Pasivos: almacenan o disipan energía (R, L, C)
- Bilaterales: permiten el paso de la intensidad en uno u otro sentido.
  - Lineal ►bilateral
- Unilateral: relacionan de forma distinta u(t) e i(t) según el sentido en que se aplica tensión o corriente.

Circuitos con parámetros concentrados

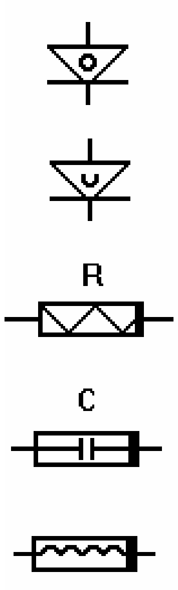
- Los efectos físicos son puntuales (R, L, C del laboratorio)

Circuitos con parámetros concentrados

- Los efectos físicos están distribuidos en el espacio: una línea eléctrica de gran longitud.
  - Espira (L): 100km a 1000km
  - Armaduras (C): >100km a 1000km

Elementos no lineales

- En general se representan de forma parecida a un diodo o a un dipolo convencional pero con forma asimétrica (raya).



- Para estudiarlos en profundidad:
  - CHUA, L.O.; DESOER Ch.A.; KUH E.S. "Linear and non Linear Circuits". Mc Graw-Hill, 1987.