Universidad Politécnica de Cartagena - ETSII

Examen de Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería

Electrónica Industrial, Examen final, 15 de febrero de 2008

Primer cuatrimestre

1. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal, y consideremos la base de $\mathbb{R}^3$ $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ donde $e_1 = (-1, -2, 1)$, $e_2 = (-2, 1, 0)$ y $e_3 = (1, 0, 0)$. Supongamos que:

$$\mathrm{M}_B(f) = \begin{pmatrix} x & 3 & 0 \\ 0 & y & 3 \\ -1 & z & -6 \end{pmatrix}.$$

donde x, y, z cumplen que tal que $f(e_1 + e_2) = (4, -5, 2)$.

i) Demuestra que $x = -1$, $y = -1$ y $z = 5$.

ii) Calcula la matriz de f respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y su expresión analítica.

iii) Estudia la inyectividad y suprayectividad de f. Calcula bases del núcleo y de la imagen de f.

(4.5 puntos)

2. Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} -5 & -3 & -3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Analiza si es diagonalizable y en caso afirmativo calcula la matriz diagonal semejante y una matriz de paso asociada.

(3.5 puntos)

3. Calcula los valores de a y b para los cuales la función $f : [-1, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 1 & \text{si } \ x \leq 1 \\ 2x + b & \text{si } \ x > 1 \end{cases}$$

satisfaga las hipótesis del teorema del valor medio de Lagrange. Para dichos valores, calcula un valor donde se obtenga la tesis.

(2 puntos)

Segundo cuatrimestre

4. i) Expresa la siguiente integral como suma de una función racional más integrales de funcionales racionales sin raíces complejas múltiples en sus denominadores, y sin necesidad de determinar los coeficientes indeterminados que aparezcan en los numeradores:

$$\int \frac{1}{(x^2-4)(x^2+4)^4(x+3)^2}dx.$$

(1 punto)

ii) Calcula $\int_{\sqrt{2}/6}^{\sqrt{3}/6} \sqrt{1-9x^2}dx$. **(1 punto)**

iii) $\int\int_{\Omega} xdxdy$ siendo Ω el interior de la parte de la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 2 que está en el cuarto cuadrante. **(1 punto)**

iv) Demuestra que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+21n+110}$$

es convergente y calcula su suma. **(1 punto)**

5. i) Analiza la continuidad, existencia de derivadas direccionales, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad en $(0,0)$ de la función $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3y}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

(2 puntos)

ii) Comprueba que la ecuación $x\cos y - y\cdot \mathrm{e}^x + 1 = 0$ define a y como función implícita de x en un abierto de $x=0$ donde toma el valor $y=1$. Calcula las derivadas primera y segunda de dicha función. **(1 punto)**

6. Resuelve:

i) $\begin{cases} y' + 2xy = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$. **(1 punto)**

ii) $\begin{cases} y'' - y = -\cos(3x) \\ y(0) = 0, y'(0) = 2 \end{cases}$.

(2 puntos)