

Universidad Politécnica de Cartagena
Departamento de Matemática Aplicada y Estadística
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial

Examen de Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería
Electrónica Industrial, Examen 1er parcial, Grupo Mañana
2 de febrero de 2009

1. i) Demuestra que si $f : V \longrightarrow W$ es una aplicación lineal y $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ es una base de V tal que $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$ es un sistema generador de W entonces f es suprayectiva. **(0.5 puntos)**

ii) Da un ejemplo de una función real de variable real continua en $x = 1$ pero no derivable en $x = 1$. Compruébalo. **(0.5 puntos)**

iii) Demuestra que si $\dim V = n$ y L es un subconjunto finito de V con más de n vectores, entonces L es un sistema ligado. Da un ejemplo que muestre que no necesariamente L sería un sistema generador de V . **(0.5 puntos)**

2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal, y consideremos la base de $\mathbb{R}^3$ $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ donde $e_1 = (-1, -2, 1)$, $e_2 = (-2, 1, 0)$ y $e_3 = (1, 0, 0)$. Supongamos que:

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} x & 3 & 0 \\ 0 & y & 3 \\ -1 & z & -6 \end{pmatrix}.$$

donde x, y, z cumplen que tal que $f(e_1 + e_2) = (4, -5, 2)$.

i) Demuestra que $x = -1$, $y = -1$ y $z = 5$.

ii) Calcula la matriz de f respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y su expresión analítica.

iii) Estudia la inyectividad y suprayectividad de f . Calcula bases del núcleo y de la imagen de f .

iv) Calcula bases de $\mathbf{Ker} f \cap \mathbf{Im} f$ y de $\mathbf{Ker} f + \mathbf{Im} f$.

(3 puntos)

3. Consideremos la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -3 & -3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Analiza si es diagonalizable y en caso afirmativo calcula la matriz diagonal semejante y una matriz de paso asociada.

(2 puntos)

4. Dada la función booleana $f : K^3 \longrightarrow K \mid f(x, y, z) = y(x' + z') + x'z$, demuestra que su forma canónica disyuntiva es $f(x, y, z) = xyz' + x'yz + x'yz' + x'y'z$ y obtén a partir de ésta, usando el método de Quine-McCluskey, una expresión booleana simplificada.

(1.5 puntos)

5. Calcula los valores de a y b para los cuales la función $f : [-1, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x + b & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

satisfaga las hipótesis del teorema del valor medio de Lagrange. Para dichos valores, calcula un valor donde se obtenga la tesis.

(2 puntos)