Universidad Politécnica de Cartagena

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial

Examen de Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería

Electrónica Industrial, Grupo Mañana

18 de septiembre de 2008

Primer cuatrimestre

1. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal y $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ base de $\mathbb{R}^3$ donde $e_1 = (-1,-2,-3)$, $e_2 = (-2,-2,-1)$ y $e_3 = (-1,1,4)$. Supongamos que:

$$\mathrm{M}_C(f) = \begin{pmatrix} x & 0 & -2 \\ y & 2 & 0 \\ z & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

donde $x, y, z \in \mathbb{R}$ tales que $f(e_1 + e_2) = (11, -11, -22)$.

i) Demuestra que $x = -1$, $y = 1$ y $z = 2$. **(1 punto)**

ii) Calcula la matriz de f respecto de la base B y su expresión analítica. **(1.5 puntos)**

iii) Estudia la inyectividad y suprayectividad de f. Calcula bases del núcleo y de la imagen de f. **(1 punto)**

iv) Calcula $f(e_1 + e_2 - e_3)$ respecto de la base B. **(1 punto)**

2. Consideremos la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Analiza si es diagonalizable y en caso afirmativo calcula la matriz diagonal semejante y una matriz de paso asociada. **(3.5 puntos)**

3. Analiza la continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = |x^2 - 1|$. (Explícalo con todo detalle)

(2 puntos)

Segundo cuatrimestre

4. Expresa la siguiente integral como suma de una función racional más integrales de funcionales racionales sin raíces complejas múltiples en sus denominadores, y sin necesidad de determinar los coeficientes indeterminados que aparezcan en los numeradores:

$$\int \frac{1}{x(x+1)^2(x^2+4)^2} dx.$$

(1 punto)

5. Calcula

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\mathrm{e}^{x^2}}{\mathrm{sen} x^2 - \mathrm{sen} x}.$$

(1 punto)

6. Calcula:

i)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^3+6^3+9^3+\ldots+(3n)^3}{n^4-2n}.$$

(1 punto)

ii) $\int \frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x-2} dx$. **(1 punto)**

iii) $\int\int_\Omega y dx dy$ siendo $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq -2x+2, y \geq x^2-1\}$. **(1 punto)**

7. i) Analiza la continuidad, existencia de derivadas direccionales, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad en $(0,0)$ de la función:

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^4y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^5}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$ **(1.5 puntos)**

ii) Aplicando los métodos estudiados en clase, calcula los extremos absolutos de $f(x,y) = x^2+y^2$ en $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq -2x+2, y \geq x^2-1\}$. **(1 punto)**

8. Resuelve:

i) $y' = \frac{xy}{x^2+y^2}$. **(1 punto)**

ii) $\begin{cases} y''+4y = 25\mathrm{e}^{2x} \\ y(0) = 4, y'(0) = 16 \end{cases}$. **(1.5 puntos)**