Universidad Politécnica de Cartagena

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial

Examen de Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería

Electrónica Industrial, Grupo Mañana

24 de junio de 2008

Primer cuatrimestre

1. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal y $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ base de $\mathbb{R}^3$ donde $e_1 = (1, -1, 1)$, $e_2 = (2, 1, 0)$ y $e_3 = (2, 3, -1)$. Supongamos que:

$$\mathrm{M}_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 1 & y & -1 \\ 2 & z & 1 \end{pmatrix}$$

donde $x, y, z \in \mathbb{R}$ tales que $2f(e_1) - f(e_2) - f(e_3) = 0$.

i) Demuestra que $x = 2$, $y = z = 3$. **(1 punto)**

ii) Calcula la matriz de f respecto de la base canónica y su expresión analítica. **(1.5 puntos)**

iii) Estudia la inyectividad y suprayectividad de f. Calcula bases del núcleo y de la imagen de f. **(1 puntos)**

iv) Calcula las coordenadas de $f(1, -1, 0)$ respecto de B y respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$. **(1 puntos)**

2. Consideremos la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Analiza si es diagonalizable y en caso afirmativo calcula la matriz diagonal semejante y una matriz de paso asociada. **(3.5 puntos)**

3. Dada la función booleana $f : K^3 \longrightarrow K \mid f(x, y, z) = y'(x' + z) + x'z'$, demuestra que su forma canónica disyuntiva es $f(x, y, z) = xy'z + x'yz' + x'y'z + x'y'z'$ y obtén a partir de ésta, usando el método de Quine-McCluskey, una expresión booleana simplificada.
(2 puntos)

Segundo cuatrimestre

4. (Anticipativo) Sea $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$. Calcula

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}$$

en función de unas nuevas coordenadas u y v donde $u = x + 2y$ y $v = 2x - y$. **(0.75 puntos)**

5. Expresa la siguiente integral como suma de una función racional más integrales de funcionales racionales sin raíces complejas múltiples en sus denominadores, y sin necesidad de determinar los coeficientes indeterminados que aparezcan en los numeradores:

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^3(x^2+x+1)x^2}dx.$$

(0.75 puntos)

6. Dada la función $f(x) = \text{sen}(-2x)$, calcula su polinomio de Taylor de grado 3 en $x = 0$, aproxima $\text{sen}(-0.4)$ utilizando el polinomio calculado y obtén la menor posible de las cotas superiores del error cometido. **(0.75 puntos)**

7. Calcula:

i)

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2n^2}} + \frac{1}{\sqrt{2n^2+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n^2+n}}\right).$$

(0.75 puntos)

ii) $\int \frac{\sqrt{x}}{x-1}dx$. **(1 punto)**

iii) $\int\int_\Omega x\,dx\,dy$ siendo $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq -x^2 + 6x - 5, y \geq x - 1\}$. **(1 punto)**

8. i) Sabiendo que la siguiente función es continua en $(0,0)$, analiza la existencia de derivadas direccionales, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad en $(0,0)$ de la función:

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$ **(1.5 puntos)**

ii) Aplicando los métodos estudiados en clase, calcula los extremos absolutos de $f(x, y) = (x-3)^2 + (y-3)^2$ en $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq -x^2 + 6x - 5, y \geq x - 1\}$. **(1 punto)**

9. Resuelve:

i) $y' - \frac{1}{x}y = y^{-1}$. **(1 punto)**

ii) $\begin{cases} y'' - y' - 2y = -754\cos(5x) \\ y(0) = 25, y'(0) = 24 \end{cases}$. **(1.5 puntos)**