Universidad Politécnica de Cartagena

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial

Examen de Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería

Electrónica Industrial, Examen final

15 de febrero de 2008

Primer cuatrimestre

1. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal, y consideremos la base de $\mathbb{R}^3$, $B = \{-1,-1,-1),(-2,1,3),(-1,1,2)\}$. Supongamos que:

$$\mathrm{M}_B(f) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & x \end{pmatrix}.$$

donde x es tal que $(-2,1,3)+(-1,1,2) \in \mathrm{Ker}\ f$.

i) Demuestra que $x = -1$.

ii) Calcula la matriz de f respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y su expresión analítica.

iii) Estudia la inyectividad y suprayectividad de f. Calcula bases del núcleo y de la imagen de f.

iv) Si $v = (-1,-1,-1)_C$, calcula las coordenadas de $f(v)$ respecto de la base B y si $w = f(v)$, calcula las coordenadas de $f(w)$ respecto de la base C.

(4.5 puntos)

2. Consideremos la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Analiza si es diagonalizable y en caso afirmativo calcula la matriz diagonal semejante y una matriz de paso asociada.

(3.5 puntos)

3. Calcula los valores de a y b para los cuales la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - a & \text{si} \quad x < -1 \\ bx + 3 & \text{si} \quad x \geq -1 \end{cases}$$

satisfaga las hipótesis del Teorema del valor medio de Lagrange en el intervalos $[-2, 3]$. Para dichos valores, calcula un valor donde se obtenga la tesis.

(2 puntos)

Segundo cuatrimestre

4. i) Calcula el polinomio de Taylor de grado 2 de $f(x) = \text{sen}(2x)$, y utilízalo para aproximar sen(0.2), obteniendo una cota del error obtenido utilizando la fórmula del error de Lagrange. **(1 punto)**

ii) Calcula

$$\int_{3\sqrt{2}/2}^{3\sqrt{3}/2} \sqrt{9 - x^2}\,dx.$$

(1 punto)

iii) Calcula $\int \frac{1}{e^x + 1} dx$. **(1 punto)**

5. i) Analiza la continuidad, existencia de derivadas direccionales, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad en $(0, 0)$ de la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

(2 puntos)

ii) Aplicando los métodos estudiados en clase, calcula los extremos absolutos de $f(x, y) = x^2 - y^2$ en $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4, x \leq y\}$. **(1.5 puntos)**

6. Resuelve:

i) $y' = \frac{x+y}{x-y}$. **(1.5 puntos)**

ii) $\begin{cases} y'' + 4y = x^2 - 2x + 5 \\ y(0) = \dfrac{1}{8}, y'(0) = \dfrac{3}{2} \end{cases}.$

(2 puntos)