

Universidad Politécnica de Cartagena
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial

Examen de Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería
Electrónica Industrial - Grupo Mañana. Examen final

9 de febrero de 2007

Primer cuatrimestre

1. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal, y consideremos la base de \mathbb{R}^3 $B = \{-1, 1, 1\}, (1, 3, 2), (2, -1, -1)\}$. Supongamos que:

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 14 & 6 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

i) Calcula la matriz de f respecto de la base canónica de \mathbb{R}^3 .

ii) Estudia la inyectividad y suprayectividad de f . Calcula bases del núcleo y de la imagen de f .

iii) Si $v = (1, -1, 1)_B$, calcula las coordenadas de $f(v)$ respecto de la base B y respecto de la base canónica de \mathbb{R}^3 .

(4.5 puntos)

2. Consideremos la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -8 \\ 1 & -4 & 4 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Analiza si es diagonalizable y en caso afirmativo calcula la matriz diagonal semejante y una matriz de paso asociada.

(3.5 puntos)

3. Calcula los valores de a y b para los cuales la función

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1 & \text{si } x \leq -1 \\ ax + b & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

satisfaga las hipótesis del Teorema del valor medio de Lagrange en el intervalos $[-2, 0]$.

Para dichos valores, calcula un valor donde se obtenga la tesis.

(2 puntos)

Segundo cuatrimestre

4. i) Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{\operatorname{sen} x}$. **(0.75 puntos)**

ii) Calcula

$$\int_{1/4}^{\sqrt{2}/4} \sqrt{1 - 4x^2} dx.$$

(1.25 puntos)

5. i) Analiza la continuidad, existencia de derivadas direccionales, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad en $(0, 0)$ de la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

(2.5 puntos)

ii) Aplicando los métodos estudiados en clase, calcula los extremos absolutos de $f(x, y) = x^2 - y^2$ en $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq -x^2 + 1, y \geq -x - 1\}$. **(2 puntos)**

6. Resuelve:

i) $y' = \frac{y^2}{xy - x^2}$. **(1 punto)**

ii)
$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = -20\operatorname{sen}(2x) \\ y(0) = 3, y'(0) = 5 \end{cases} \quad \mathbf{(2.5 \text{ puntos})}.$$