Universidad Politécnica de Cartagena

Departamento de Matemática Aplicada y Estadística

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial

Examen de Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería

Electrónica Industrial, Mañana

7 de junio de 2006

1. i) Dibuja e indica el interior, la clausura y el conjunto de los puntos de acumulación de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \setminus \{(1,0)\}$.

$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0\}$.

¿Cuáles son abiertos? ¿Cuáles son cerrados? **(0.65 puntos)**

ii) Dada $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = 2x + 3$ y la partición $\mathcal{P} = \{-1, 2, 4\}$ del intervalo $[-1, 4]$, calcula las sumas superior e inferior de Riemann de f asociadas a dicha partición. **(0.6 puntos)**

2. $\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - \cos^2 x^2}{x^2 - \operatorname{sen} x}$. **(0.75 puntos)**

3. i) Analiza la convergencia de: $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^5}+1}{x^8+1} dx$. **(0.75 puntos)**

ii) $\lim_{n \to \infty} \frac{2^2 + 4^2 + \ldots + (2n)^2}{(2n+1)^3}$. (**0.75 puntos**)

4. Calcula:

i) $\int_0^{1/4} \sqrt{1 - 4x^2} dx$. **(0.75 puntos)**

ii) Dada la integral

$$\int \frac{\sqrt{x-1}}{x^2} dx,$$

realiza un cambio de variable de forma que se obtenga una integral racional (integral de un cociente de polinomios). Expresa dicha integral como suma de una función racional y una integral de una función racional que no tenga un denominador con raíces complejas múltiples (sin determinar los coeficientes de los polinomios que se obtienen). **(0.75 puntos)**

5. i) Analiza la continuidad, existencia de derivadas direccionales, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad en $(0,0)$ de la función:

$$f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R} \text{ tal que } f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

Explica por qué dicha función es continua y diferenciable en cualquier punto distinto de $(0,0)$. **(1 punto)**

ii) Aplicando los métodos estudiados en clase, calcula los extremos absolutos de $f(x,y)=(x-1)^2+y^2$ en $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 1, y\geq 0\}$. **(1 punto)**

iii) Comprueba que la ecuación $\mathrm{e}^x \mathrm{sen}\, y-\mathrm{e}^{2y}\mathrm{sen}\, x^2=0$ define a y como función implícita de x en un abierto de $x=0$ donde toma el valor $y=0$. Calcula el polinomio de Taylor de grado 2 de dicha función en $x=0$. **(1 punto)**

6. Resuelve:

i) $\begin{cases} y'-3x^2y=\mathrm{e}^{x^3}(1+3x^3)\\ y(0)=0\end{cases}$. **(0.75 puntos)**

ii) $\begin{cases} y''-2y'+y=-2\mathrm{sen}\, x\\ y(0)=0, y'(0)=-1\end{cases}$. **(1.25 puntos)**