

Universidad Politécnica de Cartagena
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial

Examen de Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería

Electrónica Industrial, Examen final

2 de febrero de 2005

Primer cuatrimestre

1. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal tal que su matriz respecto de la base canónica C de \mathbb{R}^3 es:

$$M_C(f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & x \end{pmatrix}.$$

donde $x \in \mathbb{R}$ tal que $(2, -4, 3) \in \text{Ker } f$.

i) Demuestra que $x = 2$.

ii) Calcula la matriz de f respecto de la base $B = \{(1, -1, 1), (2, 3, 0), (-2, 0, -1)\}$ y su expresión analítica.

iii) Estudia la inyectividad y suprayectividad de f . Calcula bases del núcleo y de la imagen de f .

iv) Calcula las coordenadas respecto de la base canónica de un vector v cuyas coordenadas respecto de la base B son 1, 0, 1 (o sea, $v = (1, 0, 1)_B$). Calcula las coordenadas de $f(v)$ respecto de la base B y respecto de la base canónica de \mathbb{R}^3 .

(4.5 puntos)

2. Consideremos la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Analiza si es diagonalizable y en caso afirmativo calcula la matriz diagonal semejante y una matriz de paso asociada.

(3.5 puntos)

3. Demuestra que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}$$

es convergente y calcula su suma.

(2 puntos)

Segundo cuatrimestre

4. i) Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x^2}{x}$. (1 punto)

ii) Calcula $\int \frac{x^2+x+1}{x^3+x} dx$. (1 punto)

5. i) Analiza la continuidad, existencia de derivadas direccionales, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad en $(0, 0)$ de la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

(2.5 puntos)

ii) Aplicando los métodos estudiados en clase, calcula los extremos absolutos de $f(x, y) = x + 2y$ en $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$. (2 puntos)

6. Grupo Tarde

i) Calcula $\int \int_{\Omega} y dx dy$ siendo $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4, x \geq y\}$.

ii) Calcula $\int \int_{\Omega} x dx dy$ siendo $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq x + 1, 0 \leq x \leq 3\}$.

(3.5 puntos)

6. Grupo Mañana

Resuelve:

i)
$$\begin{cases} xy' = y \\ y(1) = 3 \end{cases}.$$

ii)
$$\begin{cases} y'' + 9y = 9x^2 + 2 \\ y(0) = 4, y'(0) = 3 \end{cases}.$$

(3.5 puntos)