Universidad Politécnica de Cartagena

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial

Examen de Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería

Electrónica Industrial, Mañana

20 de junio de 2005

Primer cuatrimestre

Primer parcial

1. Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Si A es la matriz de una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

i) Calcula la expresión analítica de f y su matriz respecto de la base

$$B = \{(1,-1,2), (-1,-1,1), (2,-1,2)\}.$$

ii) Estudia la inyectividad y suprayectividad de f. Calcula bases del núcleo y de la imagen de f.

iii) Calcula las coordenadas de $f((1,1,1)_B)$ respecto de B y respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

b) Analiza si la matriz A es diagonalizable y en caso afirmativo calcula la matriz diagonal semejante y una matriz de paso asociada.

2. Calcula:

i) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^3+4^3+\ldots+(2n)^3}{(2n+1)^4}$.

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2+8n+3}$.

Segundo parcial

3. Calcula el polinomio de Taylor de grado 3 de $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$ en $x = 0$, aproxima el valor de $\mathrm{e}^{0.2}$ utilizando dicho polinomio y obtén una cota del error cometido con tal aproximación.

4. i) Analiza la continuidad, existencia de derivadas direccionales, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad en $(0,0)$ de la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

ii) Comprueba que la ecuación $x\mathrm{e}^y + x \cdot \sin y - 1 = 0$ define a y como función implícita de x en un abierto de $x = 1$ donde toma el valor $y = 0$. Calcula las derivadas primera y segunda en $x = 1$ de dicha función.

iii) Calcula $\int_{\sqrt{2}}^{2} \sqrt{4 - x^2}\,dx$.

5. Grupo Tarde

i) Calcula $\int\int_\Omega x\,dx\,dy$ siendo Ω el interior de la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 1 del tercer cuadrante.

ii) Calcula $\int\int_\Omega x\,dx\,dy$ siendo $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq y \leq x\}$.

5. Grupo Mañana

Resuelve:

i) $\begin{cases} y' = xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$

ii) $\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = 5\cos x \\ y(0) = 2, y'(0) = 0 \end{cases}$