Universidad Politécnica de Cartagena

Departamento de Matemática Aplicada y Estadística

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial

Examen de Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería

Electrónica Industrial, Mañana

8 de junio de 2005

1. i) Dibuja e indica el interior, la clausura y el conjunto de los puntos de acumulación de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:

$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 < 4\} \cup \{(0, -3)\}$.

$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y\}$.

¿Cuáles son abiertos? ¿Cuáles son cerrados? **(0.75 puntos)**

ii) Supongamos que A es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en $a \in A$. Si $\mathrm{D}_{(1,-1)} f(a) = -1$ y $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = 2$, calcula la matriz jacobiana y la diferencial de f en a. **(0.5 puntos)**

2. i) $\lim_{x \to 0} \frac{x \cos(x + \frac{\pi}{2})}{\log(1+x^2) + \sin x^2}$. **(0.75 puntos)**

ii) Dada la función $f(x) = \sqrt{x}$ calcula su polinomio de Taylor de grado 2 en $x = 81$, aproxima $\sqrt{80}$ utilizando el polinomio calculado y obtén la menor posible de las cotas superiores del error cometido. **(0.75 puntos)**

3. Analiza la convergencia de:

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{((n+1)!)^2}$. **(0.5 puntos)**

ii) $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3}+1}{x^2+4} dx$. **(0.5 puntos)**

4. Calcula:

i) $\int_{3\sqrt{2}/2}^{3\sqrt{3}/2} \sqrt{9 - x^2} dx$. **(0.75 puntos)**

ii) $\int \frac{\sqrt{x}}{x-2} dx$. **(0.75 puntos)**

5. i) Analiza la continuidad, existencia de derivadas direccionales, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad de la función:

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}. \quad \textbf{(1.25 puntos)}$$

ii) Aplicando los métodos estudiados en clase, calcula los extremos absolutos de $f(x,y) = (x-1)^2 + y^2$ en $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0\}$. **(1 punto)**

6. Resuelve:

i) $$\begin{cases} y' - \dfrac{y}{x^2+6x+10} = 0 \\ y(-3) = 2 \end{cases}. \quad \textbf{(0.75 puntos)}$$

ii) $y' = \frac{x^4+x^3y}{x^2y^2+xy^3}$. **(0.75 puntos)**

iii) $$\begin{cases} y'' + 4y = 5x^2 + 2x + 11 \\ y(0) = 0, y'(0) = 8 \end{cases}. \quad \textbf{(1 punto)}$$