FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INGENIERÍA
1° Ingeniería Técnica Industrial (Electrónica y Electricidad)
2° parcial
11-Junio-2004

1. **(2 puntos)** Se considera una membrana circular en equilibrio, descrita matemáticamente mediante el conjunto:
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$
Al ejercer una fuerza sobre la membrana, ésta se deforma, de manera que el punto que inicialmente ocupaba la posición $(x, y, 0)$ pasa estar situado en $(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3$, siendo
$$f(x,y) = xy^2 - \frac{x}{2}, \quad (x,y) \in D$$
la función que describe la deformación. Calcula los puntos de la membrana en los que la deformación es máxima y mínima, es decir, los extremos de la función f sobre el conjunto compacto D.

2. **(1.75 puntos)** Resuelve el siguiente problema de valor inicial:
$$\left.\begin{array}{lcl} xy' - x^3\cos(x) - 2y & = & 0 \\ y(\pi) & = & 1 \end{array}\right\}$$

3. **(1 punto)** Calcula el polinomio de Taylor de grado 3 de la función $f(x) = +\sqrt{x}$ alrededor del punto $x = 1$ y utilízalo para obtener una aproximación del valor de $\sqrt{2}$. Da también la menor posible de las cotas superiores del error cometido.

4. Justifica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

   a) **(0.25 puntos)** Para $f(x, y) = \cos(xy)$ se tiene que $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

   b) **(0.25 puntos)** Dada $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, si $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right)$, existiendo ambos límites, entonces también existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ y coincide con el valor anterior

   c) **(0.25 puntos)** Si una ecuación diferencial ordinaria de orden 2 tiene solución única, necesitamos más de una condición inicial para poder determinar dicha solución

   d) **(0.25 puntos)** Dada $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, si existe $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$, su valor será $\lim\limits_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} f(x)\, dx$

5. **i) (1.25 puntos)** Halla el volumen del cuerpo de revolución generado por la rotación de la región comprendida en $\{y \leq 2 - x^2, y \geq x, x \geq 0\}$ alrededor del eje OX.

   ii) (1.5 puntos) Obtén una primitiva de la siguiente función:

$$\int \sqrt{\frac{x}{4-x}}\, dx$$

6. **(1.5 puntos)** Elige uno y solo uno de los dos apartados (SI CONTESTAS, AUNQUE SEA PARCIALMENTE, AMBOS, SE TE ANULARÁ LA PREGUNTA!!)

   i) Calcula la integral doble:

$$\int\int_D e^{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$$

   donde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4, x \leq y, x + y \geq 0\}$

   ii) Dadas la función

$$f(x, y, z) = \log(1 + xy) + x\text{sen}(z) - z$$

   y el punto $\mathbf{x}$=(0,1,0), comprueba, usando el teorema de la función implícita, que es posible obtener la variable z como función de las otras dos. Calcula además el gradiente de la función implícita en el punto $(0, 1)$.