Universidad Politécnica de Cartagena
Departamento de Matemática Aplicada y Estadística
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial

Examen de Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería
Electrónica Industrial y Electricidad

Examen final
30 de enero de 2004

Primer cuatrimestre

1. i) Demuestra que las coordenadas de un vector respecto de una base son únicas.

ii) Demuestra que si A es una matriz real invertible $n \times n$, entonces el determinante de su matriz adjunta es $|A|^{n-1}$.

iii) Da una función real de variable real que sea continua en un punto pero no derivable en dicho punto. Compruébalo.

(1.5 puntos)

2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal y $B = \{(-1,-1,-1),(-2,-1,1),(1,1,2)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$\mathbf{M}_B(f) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

i) Calcula la matriz de f respecto de la base canónica y su expresión analítica.

ii) Calcula $\mathbf{Ker}f$ e $\mathbf{Im}f$. ¿Es f inyectiva? ¿Es f suprayectiva?

iii) Si $\mathbf{v} = (-1,1,1)_B$ (o sea, -1,1,1 son las coordenadas de v respecto de la base B), obtén las coordenadas de $f(v)$ en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y en la base B.

(2.5 puntos)

3. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}).$$

Calcula sus valores propios y subespacios propios asociados, estudia si es diagonalizable y en caso afirmativo calcula la matriz diagonal semejante y una matriz de paso.

(2 puntos)

4. Resuelve uno de los siguientes problemas:

4A. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ con el espacio escalar canónico se considera el subespacio $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$.

i) Calcula la expresión analítica de la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^2$ de base S.

ii) Calcula la distancia de $v = (3, -1)$ a S.

4B. Dada la función booleana $f : K^3 \longrightarrow K \mid f(x, y, z) = z'(x'+y')+z(x'+y)$, demuestra que su forma canónica disyuntiva es $f(x, y, z) = xyz+x'yz+xy'z'+x'yz'+x'y'z+x'y'z'$ y obtén a partir de ésta, usando el método de Quine-McCluskey, una expresión booleana simplificada de dicha función booleana.

(1.5 puntos)

5. Resuelve los siguientes apartados:

i) Consideremos la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x\cos^2 x^2$. Calcula el polinomio de Taylor de grado 1 de $f(x)$ en $x = 0$.

ii) Calcula

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^4 + 2^4 + \ldots + n^4}{n^5}.$$

(2.5 puntos)

Segundo parcial

6. i) Analiza la continuidad, existencia de derivadas direccionales, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad en $(0,0)$ de la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

(2.5 puntos)

ii) Comprueba que la ecuación $ze^{x+y+z} + 2\cos^2 x^2 - 2 = 0$ define a z como función implícita de x e y en un abierto de $(x,y) = (0,0)$ donde toma el valor $z = 0$. Calcula las derivadas parciales primeras en $(0,0)$ de dicha función. **(1.5 puntos)**

7. i) Calcula $\int \frac{2x+4}{x^2+2x+5} dx$.

ii) Calcula $\int\int_\Omega x dx dy$ siendo $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$.

iii) Calcula $\int\int_\Omega x dx dy$ siendo $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x-1, y \leq -x^2+6x-5\}$.

(3 puntos)

8. Resuelve el problema de condiciones iniciales:

$$\begin{cases} y'' - 2y' = -5\sin x \\ y(0) = 1, y'(0) = -1 \end{cases}$$ **(3 puntos)**

NOTA IMPORTANTE: Entrega cada parcial por separado.