Universidad Politécnica de Cartagena
Departamento de Matemática Aplicada y Estadística
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial

Examen de Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería Electrónica Industrial

30 de enero de 2004

1. i) Demuestra que las coordenadas de un vector respecto de una base son únicas.

ii) Demuestra que si A es una matriz real invertible $n \times n$, entonces el determinante de su matriz adjunta es $|A|^{n-1}$.

iii) Da una función real de variable real que sea continua en un punto pero no derivable en dicho punto. Compruébalo.

(1.5 puntos)

2. Consideremos los subespacios de $\mathbb{R}^4$ $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y + z = 0, 2y + z - t = 0\}$ y $T = \langle (1, 0, 1, -1), (a, 2, -2, 2) \rangle$ donde $a \in \mathbb{R}$.

i) Calcula una base de S.

ii) Calcula los $a \in \mathbb{R}$ tales que la dimensión de $S + T$ sea 3.

(1 punto)

3. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal y $B = \{(-1, -1, -1), (-2, -1, 1), (1, 1, 2)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$\mathbf{M}_B(f) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

i) Calcula la matriz de f respecto de la base canónica y su expresión analítica.

ii) Calcula $\mathbf{Ker} f$ e $\mathbf{Im} f$. ¿Es f inyectiva? ¿Es f suprayectiva?

iii) Si $\mathbf{v} = (-1, 1, 1)_B$ (o sea, -1,1,1 son las coordenadas de v respecto de la base B), obtén las coordenadas de $f(v)$ en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y en la base B.

(2 puntos)

4. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}).$$

Calcula sus valores propios y subespacios propios asociados, estudia si es diagonalizable y en caso afirmativo calcula la matriz diagonal semejante y una matriz de paso.

(1.5 puntos)

5. Resuelve uno de los siguientes problemas:

5A. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ con el espacio escalar canónico se considera el subespacio $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$.

i) Calcula la expresión analítica de la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^2$ de base S.

ii) Calcula la distancia de $v = (3, -1)$ a S.

5B. Dada la función booleana $f : K^3 \longrightarrow K \mid f(x, y, z) = z'(x'+y')+z(x'+y)$, demuestra que su forma canónica disyuntiva es $f(x, y, z) = xyz+x'yz+xy'z'+x'yz'+x'y'z+x'y'z'$ y obtén a partir de ésta, usando el método de Quine-McCluskey, una expresión booleana simplificada de dicha función booleana.

(1.4 puntos)

6. i) Calcula

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^4 + 2^4 + \ldots + n^4}{n^5}.$$

ii) Analiza la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{(n-1)!}.$$

(1.3 puntos)

7. i) Analiza la continuidad y la derivabilidad de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } \; x < \pi \\ -x\cos x & \text{si } \; x \geq \pi \end{cases}.$$

ii) ¿Verifica la función $f : [0, 4] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} & \text{si } \; x < 1 \\ 3x - x^3 & \text{si } \; x \geq 1 \end{cases}.$$

las hipótesis del teorema de Bolzano? ¿Existe algún punto donde se satisfaga la tesis de dicho resultado?

(1.3 puntos)