Universidad Politécnica de Cartagena

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial

Examen de Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería

Electrónica Industrial, Mañana

6 de septiembre de 2003

Primer cuatrimestre

1. i) Sea $f : V \longrightarrow W$ una aplicación lineal y $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$ tales que $f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{f}(\mathbf{y})$. Demuestra que existe un vector de V cuya imagen no es el vector nulo. **(0.75 puntos)**

ii) ¿Qué es una serie de números reales? ¿Qué significa que una serie sea convergente? ¿Pueden ser convergentes las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(1/n) \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(1/n)}{1+n^2}?$$

¿Por qué? **(0.75 puntos)**

2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal y $B = \{(-1,1,1), (2,1,0), (-3,2,2)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$\mathbf{M}_B(f) = \begin{pmatrix} -30 & 24 & -75 \\ 3 & -1 & 7 \\ 13 & -9 & 32 \end{pmatrix}.$$

i) Calcula la matriz de f respecto de la base canónica y su expresión analítica.

ii) Calcula $\mathbf{Ker}f$ e $\mathbf{Im}f$. ¿Es f inyectiva? ¿Es f suprayectiva?

iii) Si $\mathbf{v} = (-1,1,0)_B$ (o sea, -1,1,0 son las coordenadas de v respecto de la base B), obtén las coordenadas de $f(v)$ en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y en la base B.

(2.5 puntos)

3. Consideramos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}).$$

Calcula sus valores propios, estudia si es diagonalizable y en caso afirmativo calcula una matriz diagonal semejante y una matriz de paso asociada.

(2 puntos)

3. Dada la función booleana $f : K^3 \longrightarrow K \mid f(x,y,z) = x(y+z') + x'z'$, demuestra que su forma canónica disyuntiva es $f(x,y,z) = xyz + xyz' + xy'z' + x'yz' + x'y'z'$ y obtén por el método de Quine-McCluskey una expresión booleana simplificada de esta función booleana. **(1.5 puntos)**

4. i) Calcula los siguientes límites:

$$\textbf{i)} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\pi n^2 + n} \quad \textbf{ii)} \lim_{n\to\infty} \frac{(1+n)\cos(\log(n^2+\pi))}{n^2+3}$$

$$\textbf{iii)} \lim_{x\to 0} \frac{\log^2(1+x^2)}{x^4 + \sin\, x}.$$

(1.5 puntos)

5. Dada la función $f(x) = \log(1+x)$:

i) Calcula su polinomio de Taylor de grado cinco alrededor del punto $x_0 = 0$.

ii) Utiliza el polinomio anterior para obtener una aproximación al valor de $\log 0.5$.

iii) Determina mediante la fórmula del error de Lagrange una cota del error cometido en la aproximación anterior.

iv) Calcula el valor exacto de $\log 0.5$ y valora la bondad de la cota de error obtenida.

(1 punto)

Segundo parcial

6. i) Dibuja e indica el interior, la clausura y el conjunto de los puntos de acumulación de $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2\} \cup \{(0, 1)\}$.

¿Es abierto? ¿Es cerrado? **(0.75 puntos)**

ii) Dada $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = \sin x$ y la partición $\mathcal{P} = \{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\}$ del intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$, calcula las sumas superior e inferior de Riemann de f asociadas a dicha partición.

(0.75 puntos)

7. i) Analiza la continuidad, existencia de derivadas direccionales, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad en $(0, 0)$ de la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^2}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

(2 puntos)

ii) Calcula los extremos absolutos de $f(x, y) = x^2 + y^2$ en $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x + 2, y \geq x^2 + 2x\}$. **(1.5 puntos)**

8. Calcula las siguientes integrales:

i) $\int_{-1}^{1} \sqrt{-x^2 - 2x + 3}dx$. **(1 punto)**

ii) $\int\int_\Omega ydxdy$ siendo $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, -x \leq y \leq 0\}$. **(1 punto)**

9. Resuelve:

i) $y' - \frac{1}{x}y = x\cos x$. **(1 punto)**

ii) $\begin{cases} y'' + 4y = -8x^2 \\ y(0) = 3, y'(0) = -2. \end{cases}$ **(2 puntos)**