Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería
Ingeniero Técnico Industrial (Electrónica Industrial)
Curso 2002/03 (1er Parcial)
8 de febrero de 2003

CUESTIONES TEÓRICAS

1. Define núcleo de una aplicación lineal. Demuestra que una aplicación lineal $f : V \longrightarrow W$ es inyectiva si y sólo si $\operatorname{Ker} f = 0$.

2. Dada una aplicación lineal $f : V \longrightarrow W$ y dos vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ tales que $f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{v})$, demuestra que existe un vector $\mathbf{w} \in \operatorname{Ker} f$ de forma que $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$.

3. ¿Es toda sucesión acotada de números reales convergente? Justifica tu respuesta.

4. Enuncia claramente el Teorema del valor medio de Lagange y calcula los valores de α y β para que la función:

$$f(x) = \begin{cases} \cos(1 + x^2), & x < 0 \\ \alpha \cos(x) + \beta\,(1 + \operatorname{sen}(x)), & x \geq 0 \end{cases}$$

   satisfaga las condiciones de dicho teorema.

PROBLEMAS

1. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se consideran la base $\mathcal{B} = \{(1,1,-1),\, (0,1,2),\, (-1,0,2)\}$ y la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cuya matriz respecto de $\mathcal{B}$ es de la forma:

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

   Con estos elementos:

   (a) Calcula la matriz de f respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Obtén la expresión analítica de la aplicación f.
   (c) Determina bases del núcleo y de la imagen de f.
   (d) ¿Es f inyectiva? ¿Y suprayectiva?
   (e) Dado $\mathbf{v} = (0,2,3)$, calcula las coordenadas de $f(\mathbf{v})$ respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y respecto de la base $\mathcal{B}$.

2. Dada la matriz cuadrada:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

   (a) Calcula sus valores propios y los subespacios propios asociados.

   (b) Estudia si es diagonalizable y en caso afirmativo calcula la matriz diagonal asociada y una matriz de paso.

3. Dada la función booleana $f : K^3 \longrightarrow K \mid f(x,y,z) = x(y' + z') + x'z'$, demuestra que su forma canónica disyuntiva es $f(x,y,z) = xyz' + xy'z + xy'z' + x'yz' + x'y'z'$ y obtén a partir de ésta, usando el método de Quine-McCluskey, una expresión booleana simplificada.

4. Calcula los siguientes límites:

$$\text{(a)} \lim_{n\to\infty} \frac{1 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4}{n^5} \qquad \text{(b)} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{\log(1+x^3) + x\cos(x + \frac{\pi}{2})}$$

5. Dada la función $f(x) = \log(1 + x^2)$:

   (a) Calcula el polinomio de Taylor de grado cuatro de f alrededor del punto cero.

   (b) Utiliza dicho polinomio para obtener una aproximación de $\log(2)$.

   (c) Utiliza la fórmula del resto de Lagrange para obtener una cota del error cometido en la aproximación del apartado anterior.

INDICACIONES

- Cada ejercicio debe empezarse en una hoja aparte.
- Escribe el nombre, la especialidad y el grupo en que estás matriculado en cada una de las hojas del examen.
- No se puede fumar en el aula.
- El examen se escribirá con bolígrafo.
- El alumno debe llevar el DNI o algún documento identificativo.
