Universidad Politécnica de Cartagena

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial

Examen de Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería

Electrónica Industrial, Mañana

2 de diciembre de 2002

Primer cuatrimestre

1. i) Demuestra que la suma de dos subespacios vectoriales es subespacio. **(0.75 puntos)**

ii) Dada $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = x + 1$ y la partición $\mathcal{P} = \{-1, 1, 3\}$ del intervalo $[-1, 3]$, calcula las sumas superior e inferior de Riemann de f asociadas a dicha partición.
(0.75 puntos)

2. i) Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Si A es la matriz de una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

i) Calcula la expresión analítica de f y su matriz respecto de la base

$$B = \{(-1, 0, 1), (-1, 0, 0), (0, 1, 1)\}.$$

(1 punto)

ii) Estudia la inyectividad y suprayectividad de f. Calcula bases del núcleo y de la imagen de f. **(0.75 puntos)**

iii) Calcula las coordenadas de $f((1, 1, 1)_B)$ respecto de B y respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$. **(1 punto)**

b) Calcula los valores propios de A, estudia si es diagonalizable y en caso afirmativo calcula una matriz diagonal semejante y una matriz de paso asociada a dicha matriz diagonal. **(2.5 puntos)**

3. Dada la función booleana $f : K^3 \longrightarrow K \mid f(x,y,z) = yz' + (x'+z')y'$, demuestra que su forma canónica disyuntiva es $f(x,y,z) = xyz' + xy'z' + x'yz' + x'y'z + x'y'z'$ y obtén por el método de Quine-McCluskey una expresión booleana simplificada de esta función booleana. **(1.5 puntos)**

4. i) Analiza la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+2}}{(n+1)!}$. **(0.75 puntos)**

ii) Calcula $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-\sin^2 x}{\sin x^2}$. **(1 punto)**

Segundo parcial

5. i) Dibuja e indica el interior, la clausura y el conjunto de los puntos de acumulación de $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\} \setminus \{(1,0)\}$.

¿Es abierto? ¿Es cerrado? **(0.75 puntos)**

ii) Determina la diferencial de la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x,y) = \sin^2 x \cos y^2$ en $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. **(0.75 puntos)**

6. i) Analiza la continuidad, existencia de derivadas direccionales, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad en $(0,0)$ de la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

(2.5 puntos)

ii) Calcula los extremos absolutos de $f(x,y) = -x^2 + (y-1)^2$ en $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2, y \leq x+2\}$. **(1.5 puntos)**

7. i) Calcula $\int\int_\Omega xy\,dx\,dy$ siendo Ω la parte de la circunferencia de radio 1 del tercer cuadrante.

(2 punto)

ii) Resuelve el problema de condiciones iniciales:

$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = -10 \sin x \\ y(0) = 3, y'(0) = 3 \end{cases}$$ **(2.5 puntos)**