Universidad Politécnica de Cartagena

Departamento de Matemática Aplicada y Estadística

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial

Examen de Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería

Electrónica Industrial, Mañana

14 de Septiembre de 2002

Primer cuatrimestre

1. i) Si $f : V \longrightarrow W$ es una aplicación lineal suprayectiva y $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base de V, demuestra que $\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$ es un sistema generador de W . **(0.75 puntos)**

ii) Dada $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = x^2 + 4$ y la partición $\mathcal{P} = \{0, 1, 2\}$ del intervalo $[0, 2]$, calcula las sumas superior e inferior de Riemann de f asociadas a dicha partición.

(1 punto)

2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$\mathbf{M}_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

siendo $B = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (-1, 0, 0)\}$.

i) Calcula la expresión analítica de f y su matriz respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

(1 punto)

ii) Estudia la inyectividad y suprayectividad de f. Calcula bases del núcleo y de la imagen de f. **(0.75 puntos)**

iii) Calcula las coordenadas de $f((-1, 1, 0)_B)$ respecto de B y respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$. **(0.75 puntos)**

3. Consideramos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}).$$

Calcula sus valores propios, estudia si es diagonalizable y en caso afirmativo calcula la matriz diagonal semejante y una matriz de paso.

(2 puntos)

4. Dada la función booleana $f : K^3 \longrightarrow K \mid f(x,y,z) = xy'z + z'(xy' + y)$, demuestra que su forma canónica disyuntiva es $f(x,y,z) = xyz' + xy'z + xy'z' + x'yz'$ y obtén por el método de Quine-McCluskey una expresión booleana simplificada de esta función booleana. **(1.25 puntos)**

5. i) Calcula el polinomio de Taylor de grado 2 de la función $f(x) = \mathbf{tan}\ x$ en $x = 0$, y a partir de éste, obtén una aproximación de $\tan(0.1)$. Obtén a partir de la fórmula de Lagrange del error, una cota del error cometido.

(1.25 puntos)

ii) Calcula $\int_0^1 \sqrt{4 - x^2}dx$. **(1.25 puntos)**

Segundo parcial

6. i) Dibuja e indica el interior, la clausura y el conjunto de los puntos de acumulación de $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \leq 0\} \setminus \{(0,0)\}$.

¿Es abierto? ¿Es cerrado? **(0.75 puntos)**

ii) Si $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x,y) = x^2 + y^2$, calcula la diferencial de f en $(1,1)$ y la derivada direccional, en la dirección del vector $(-1,1)$, de f en $(1,1)$. **(0.75 puntos)**

7. i) Analiza la continuidad, existencia de derivadas direccionales, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad en $(0,0)$ de la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3xy^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

(2 puntos)

ii) Calcula los extremos absolutos de $f(x,y) = -x^2 - y^2$ en $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq -x^2 + 1, y \geq -1\}$. **(1.5 puntos)**

8. Calcula las siguientes integrales:

$\int\int_\Omega xdxdy$ siendo $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq -x^2+1, y \geq -x-1\}$.

(1.25 puntos)

$\int\int_\Omega ydxdy$ siendo Ω la parte de la circunferencia de radio 2 que está a la debajo del eje OY.

(1 punto)

9. i) Resuelve la ecuación diferencial $y' + y = xy^3$ **(1.25 puntos)**

ii) Resuelve el problema de condiciones iniciales:

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 4x^2 \\ y(0) = 7, y'(0) = 5 \end{cases}$$ **(1.5 puntos)**