Universidad Politécnica de Cartagena

Departamento de Matemática Aplicada y Estadística

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial

Examen de Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería

Electrónica Industrial, Mañana

5 de Julio de 2002

Primer cuatrimestre

1. i) Define coordenadas de un vector respecto de una base y demuestra que éstas son únicas. **(0.75 puntos)**

ii) Dada $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = x^2 + 1$ y la partición $\mathcal{P} = \{-1, 0, 2\}$ del intervalo $[-1, 2]$, calcula las sumas superior e inferior de Riemann de f asociadas a dicha partición.

(1 punto)

2. i) Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Si A es la matriz de una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

i) Calcula la expresión analítica de f y su matriz respecto de la base

$$B = \{(-1, 0, 1), (-1, 0, 0), (0, 1, 1)\}.$$

(1 punto)

ii) Estudia la inyectividad y suprayectividad de f. Calcula bases del núcleo y de la imagen de f. **(0.75 puntos)**

iii) Calcula las coordenadas de $f((1, 1, 0)_B)$ respecto de B y respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$. **(0.75 puntos)**

b) Calcula los valores propios de A, estudia si es diagonalizable y en caso afirmativo calcula una matriz diagonal semejante y una matriz de paso asociada a dicha matriz diagonal. **(2 puntos)**

3. Dada la función booleana $f : K^3 \longrightarrow K \mid f(x, y, z) = x(y + z') + z'x'$, demuestra que su forma canónica disyuntiva es $f(x, y, z) = xyz + xyz' + xy'z' + x'yz' + x'y'z'$ y obtén por el método de Quine-McCluskey una expresión booleana simplificada de esta función booleana. **(1.25 puntos)**

4. i) Calcula $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \tan x^2}{\tan^2 x}$. **(1 punto)**

ii) Calcula $\int_0^2 \sqrt{16 - x^2} dx$ **(1.5 puntos)**

Segundo parcial

5. i) Analiza la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^3}$. **(0.5 puntos)**

ii) Dibuja e indica el interior, la clausura y el conjunto de los puntos de acumulación de $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, x < 0\} \cup \{(1, 0)\}$.

¿Es abierto? ¿Es cerrado? **(0.75 puntos)**

6. i) Calcula $\lim_{n\to\infty} \frac{2+4+\ldots+2n}{2n^2+1}$. **(0.75 puntos)**

ii) Analiza el carácter de la integral impropia

$$\int_0^1 \frac{2x + 3}{\sqrt[3]{x^2 + x}} dx.$$

(0.75 puntos)

7. i) Analiza la continuidad, existencia de derivadas direccionales, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad en $(0, 0)$ de la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

(2 puntos)

ii) Calcula los extremos absolutos de $f(x,y) = x^2 + y^2$ en $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2 - 1, y \leq x + 1\}$. **(1.25 puntos)**

8. Calcula las siguientes integrales:

$\int\int_\Omega x dx dy$ siendo Ω el triángulo de vertices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(1,1)$.

(0.75 puntos)

$\int\int_\Omega y dx dy$ siendo Ω la parte de la circunferencia de radio 1 del cuarto cuadrante.

(1 punto)

9. i) Resuelve la ecuación diferencial $y' - y\cos^2 x = 0$ **(0.75 puntos)**

ii) Resuelve el problema de condiciones iniciales:

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = 25\cos 2x \\ y(0) = -2, y'(0) = 10 \end{cases} \quad \textbf{(1.5 puntos)}$$