

Universidad Politécnica de Cartagena
Departamento de Matemática Aplicada y Estadística
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial

Examen de Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería
Electrónica Industrial, Mañana

1 de Junio de 2002

1. i) Dibuja e indica el interior, la clausura y el conjunto de los puntos de acumulación de los siguientes subconjuntos de \mathbb{R}^2 :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(0, 1)\} \cup \{(0, 2)\}$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\} \cup \{(-2, 0)\}$$

¿Cuáles son abiertos? ¿Cuáles son cerrados? **(0.5 puntos)**

ii) Supongamos que A es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^2 y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en $a \in A$. Si $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = -1$ y $D_{(1,1)}f(a) = 2$, calcula la matriz jacobiana y la diferencial de f en a . **(0.6 puntos)**

iii) Demuestra que la sucesión

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} \quad \text{si } n > 1$$

es convergente y calcula su límite. **(0.4 puntos)**

2. i) Calcula

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 3^2 + \dots + (2n + 1)^2}{n^3}.$$

(0.5 puntos)

ii) Analiza la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{((n+1)!)^2}$. **(0.5 puntos)**

iii) Analiza el carácter de la integral impropia

$$\int_1^2 \frac{x^2 + 1}{\sqrt[3]{x^3 - 4x^2 + 4x}} dx.$$

(0.5 puntos)

3. Analiza la continuidad, existencia de derivadas direccionales, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad de la función:

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{(1.25 puntos)}$$

4. i) Comprueba que la ecuación $xe^z - y \cos z = 0$ define a z como función implícita de x e y en un abierto de $(x, y) = (1, 1)$ donde toma el valor $z = 0$. Calcula las derivadas parciales primeras de dicha función. **(1 punto)**

ii) Aplicando los métodos estudiados en clase, calcula los extremos absolutos de $f(x, y) = x^2 + y^2$ en $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2 - 1, y \leq x + 1\}$. **(1 punto)**

5. Calcula las siguientes integrales:

i) $\int \int_{\Omega} y dx dy$ siendo $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2 - 1, y \leq x + 1\}$. **(0.75 puntos)**

ii) $\int \int_{\Omega} y dx dy$ siendo Ω el interior de la parte de la circunferencia de radio 1 del cuarto cuadrante. **(0.75 puntos)**

6. i) Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$y^{(v)} + y^{(iv)} - y''' - y'' = 0 \quad \text{(0.5 puntos)}$$

$$y' = \frac{-xy + y^2}{2x^2 + xy} \quad \text{(0.5 puntos)}$$

ii) Resuelve los siguientes problemas de condiciones iniciales:

$$\begin{cases} y' - \frac{y}{1+x^2} = 0 \\ y(1) = 2e^{\pi/4} \end{cases} \quad \text{(0.5 puntos)}$$

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = -17 \sin 2x \\ y(0) = 3, y'(0) = 1 \end{cases} \quad \text{(0.75 puntos)}$$