Universidad Politécnica de Cartagena

Departamento de Matemática Aplicada y Estadística

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial

Examen de Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería

Electrónica Industrial, Mañana

30 de Noviembre de 2001

1. i) Demuestra que si $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base de un espacio vectorial V entonces cada vector de V se escribe de forma única como combinación lineal de B.

ii) Enuncia e interpreta geométricamente el Teorema del valor medio de Lagrange.

iii) Dada la función $f(x) = x^2 + 1$ y la partición $\mathcal{P} = \{0, 1, 2\}$ del intervalo $[0, 2]$, calcula las sumas superiores e inferiores de f asociadas a dicha partición.

iv) Representa gráficamente el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 \leq 4\} \cup \{(0, 1), (3, 0)\}$. Calcula el interior, la clausura, la frontera y el conjunto de los puntos de acumulación de A. ¿Es abierto? ¿Es cerrado?

(1.2 puntos)

2. i) Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Si A es la matriz de una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$:

i) Calcula la expresión analítica de f y su matriz respecto de la base

$$B = \{(-1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 0)\}.$$

ii) Estudia la inyectividad y suprayectividad de f. Calcula bases del núcleo y de la imagen de f.

b) Calcula los valores propios de A, estudia si es diagonalizable y en caso afirmativo calcula una matriz diagonal semejante y una matriz de paso asociada a dicha matriz diagonal.

(3 puntos)

3. i) Analiza la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+2}}{(n!)^2}$.

ii) Calcula el polinomio de McLaurin de grado 3 de la función $f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{sinx}}$. Utiliza éste para aproximar $\mathrm{e}^{\mathrm{sin}0.1}$.

(1 punto)

4. Calcula:

i) $\int \frac{1}{1+\cos^2 x} dx$

ii) $\int\int_\Omega y dx dy$ siendo $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \leq 0\}$.

iii) $\int\int_\Omega x dx dy$ siendo Ω el triángulo de vertices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$.

(1.5 puntos)

5. i) Analiza la continuidad, existencia de derivadas direccionales, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad en $(0, 0)$ de la función:

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{-xy^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ii) Calcula los extremos absolutos de $f(x, y) = x^2 - (y+2)^2$ en $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 9, y \leq 0\}$.

(2 puntos)

6. Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales:

i) $y' = \frac{y^2+xy}{x^2}$.

ii) $y'' + 2y' - 2y = -2x^2 + 2x + 4$

(1.3 puntos)