Universidad Politécnica de Cartagena

Departamento de Matemática Aplicada y Estadística

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial

Examen de Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería

Electrónica Industrial, Mañana

15 de Septiembre de 2001

1. i) Da un ejemplo que muestre que la unión de dos subespacios no es en general subespacio. Define la suma de dos subespacios de un espacio vectorial. Demuestra que la suma de dos subespacios es subespacio.

ii) Enuncia el Teorema de Rolle. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 - 4x + 3 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$

¿Verifica f las hipótesis de dicho teorema en el intervalo $[-2, 2]$? ¿y la tesis?

iii) Representa gráficamente los conjuntos $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, x < y\}$ y $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(0, 2)\}$. Calcula el interior, la clausura, la frontera y el conjunto de los puntos de acumulación de A y de B. ¿Son abiertos? ¿Son cerrados?

(1.2 puntos)

2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un endomorfismo tal que su matriz respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

i) Calcula la expresión analítica de f.

ii) Estudiar la inyectividad y suprayectividad de f. Calcula bases del núcleo y la imagen de f.

iii) Calcula bases de $\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f$ y de $\mathrm{Ker} f + \mathrm{Im} f$.

iv) Calcula la matriz de f respecto de la base $B = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$.

(2 puntos)

3. Consideramos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}).$$

Calcula sus valores propios y subespacios propios asociados, estudia si es diagonalizable y en caso afirmativo calcula la matriz diagonal semejante y una matriz de paso.

(1.5 puntos)

4. i) Calcula

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^2 + 4^2 + \ldots + (2n)^2}{n^3 + n}.$$

ii) Calcula el polinomio de Taylor de grado 4 de la función $f(x) = \sin(2x)$ en $x = 0$. Utiliza éste para aproximar $\sin 0.2$. Dar la menor posible de las cotas de error cometido utilizando la fórmula de Lagrange del error.

(0.9 puntos)

5. Calcula:

i) $\int \frac{2x^2+2x+6}{x^3-x^2+4x-4}dx$ **ii)** $\int_0^3 \sqrt{9-x^2}dx$

iii) $\int\int_\Omega x dx dy$ siendo $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \leq 0\}$.

(1.4 puntos)

6. i) Analiza la continuidad, existencia de derivadas direccionales, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad en $(0, 0)$ de la función:

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{-x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ii) Calcula los extremos absolutos de $f(x, y) = x^2+(y-1)^2$ en $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 4, y \geq 0\}$.

(2 puntos)

7. Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales:

i) $y'' + y = 5\mathrm{e}^{2x}$.

ii)

$$\begin{cases} y' - y \sin x = 0 \\ y(\frac{\pi}{2}) = 1 \end{cases}$$

(1 punto)