Universidad Politécnica de Cartagena

Departamento de Matemática Aplicada y Estadística

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial

Examen de Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería

Electrónica Industrial, Mañana

6 de Julio de 2001

1. i) Define coordenadas de un vector respecto de una base y demuestra que éstas son únicas. **(0.5 puntos)**

ii) Sean $S = \langle (1,1,1), (-1,1,0), (2,-2,0) \rangle$ y $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3y - 2z = 0\}$. Calcula bases de S, T, $S \cap T$ y $S + T$. **(1.25 puntos)**

2. i) Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Si A es la matriz de una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

i) Calcula la expresión analítica de f y su matriz respecto de la base

$$B = \{(-1,0,1), (1,1,0), (1,0,0)\}.$$

(1.25 puntos)

ii) Estudia la inyectividad y suprayectividad de f. Calcula bases del núcleo y de la imagen de f. **(1 punto)**

b) Calcula los valores propios de A, estudia si es diagonalizable y en caso afirmativo calcula una matriz diagonal semejante y una matriz de paso asociada a dicha matriz diagonal. **(2 puntos)**

3. a) Definición e interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto. Demuestra que toda función derivable en un punto es continua en dicho punto. **(0.75 puntos)**

b) i) Calcula $\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+...+n}{n^2-2}$. **(0.5 puntos)**

ii) Analiza la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{((n+1)!)^2}$. **(0.75 puntos)**

iii) Calcula $\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan^2 x^2}{\sin x}$. **(0.75 puntos)**

iv) Calcula las siguientes integrales:

$\int\frac{\sqrt{x}+1}{x-\sqrt{x}}dx$ **(0.5 puntos)**

$\int\frac{1}{\cos x}dx$. **(0.75 puntos)**

4. i) Supongamos que $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ es diferenciable en $a\in\mathbb{R}^2$ tal que $\mathrm{D}_{(1,0)}f(a)=1$ y $\mathrm{D}_{(0,1)}f(a)=-1$. Calcula $\mathrm{d}f(a)(-1,2)$. **(1 punto)**

ii) Analiza la continuidad, existencia de derivadas direccionales, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad en $(0,0)$ de la función $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

(2 puntos)

iii) Calcula los extremos absolutos de $f(x,y)=-(x+1)^2-y^2$ en $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 4, x\leq 0\}$. **(1.5 puntos)**

5. Calcula las siguientes integrales:

$\int\int_\Omega y\,dx\,dy$ siendo $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 1, x\leq 0\}$. **(1.5 puntos)**

$\int\int_\Omega y\,dx\,dy$ siendo Ω el triángulo de vertices $(-1,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$. **(1 punto)**

6. i) Resuelve la ecuación diferencial $y''+y'+2y=-2\sin x$ **(1.5 puntos)**

ii) Resuelve el problema de condiciones iniciales:

$$\begin{cases} y'-y\cos x=0\\ y(0)=1\end{cases}$$ **(1.5 puntos)**

Primer parcial: Ejercicios 1, 2 y 3.

Segundo parcial: Ejercicios 4, 5 y 6.

Algunos Métodos de integración

2. Integrales de funciones irracionales algebraicas

Son integrales no inmediatas de funciones en las cuales aparecen alguna raiz o raices con el mismo radicando de la forma $\frac{ax+b}{cx+d}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ o sea, integrales de la forma

$$\int R(x, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{n_1}{m_1}}, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{n_2}{m_2}}, \ldots, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{n_r}{m_r}})\ dt.$$

Entonces hacemos el cambio $(\frac{ax+b}{cx+d}) = t^s$ donde $s = \text{mcm}(m_1, m_2, \ldots, m_r)$.

3. Método de Euler

Se utiliza para calcular integrales del tipo

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\ dt$$

que no son inmediatas. Los cambios que se pueden efectuar son:

i) $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x + t$ si $a > 0$.

ii) $\sqrt{ax^2+bx+c} = tx \pm \sqrt{c}$ si $c > 0$.

iii) $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\alpha)$ si α es una raiz real de $ax^2+bx+c = 0$.

4. Método Alemán

Se utiliza para calcular integrales de la forma

$$\int \frac{A_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\ dt$$

donde $A_n(x)$ es un polinomio de grado n. Entonces expresaremos

$$\int \frac{A_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\ dt = \sqrt{ax^2+bx+c}\ A_{n-1}(x) + \int \frac{L}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\ dt$$

donde $A_{n-1}(x)$ es un polinomio de grado $n-1$ y $L \in \mathbb{R}$. Derivando la expresión anterior se determinan $A_{n-1}(x)$ y L.

Para el cálculo de $\int \frac{L}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\ dt$, si ésta no es inmediata, puede ser necesaria la utilización del Método de Euler.

5. Integrales Binomias

Son integrales de la forma

$$\int x^m (a + bx^n)^p \; dt$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$, y $m, n, p \in \mathbb{Q}$.

Tenemos las siguientes posibilidades:

i) Si $p \in \mathbb{Z}$ entonces la integral anterior es irracional algebraica.

ii) Si $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$ y $p = \frac{r}{s}$ irreducible con $r, s \in \mathbb{Z}$ entonces efectuaremos el cambio $a + bx^n = u^s$.

iii) Si $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$ efectuaremos el cambio $\frac{a}{x^n} + b = u^s$ donde s es el del apartado **ii)**.

6. Integrales de funciones transcendentes

Para el caso $\int R(\sin x, \cos x) \; dt$ el cambio general es $\tan \frac{x}{2} = t$ aunque hay algunos casos especiales donde se pueden simplificar los cálculos:

a) Si R es impar en seno, o sea $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ entonces haremos el cambio $t = \cos x$.

b) Si R es impar en coseno, o sea $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ entonces haremos el cambio $t = \sin x$.

c) Si R es par, o sea $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ entonces haremos el cambio $t = \tan x$.

Cambios Trigonométricos

Se suelen usar cuando tenemos integrales donde aparecen raices de los siguientes tipos:

i) $\sqrt{a^2 - b^2 u^2}$ donde u es una función, $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Haremos el cambio $u = \frac{a}{b} \sin t$. (Recordar que $\sqrt{1 - \sin^2 t} = \cos t$).

ii) $\sqrt{a^2 + b^2 u^2}$ siendo a, b, u como en **i)** . Haremos el cambio $u = \frac{a}{b} \tan t$. (Recordar que $\sqrt{1 + \tan^2 t} = \sec t$).

iii) $\sqrt{b^2 u^2 - a^2}$ siendo a, b, u como en **i)** . Haremos el cambio $u = \frac{a}{b} \sec t$. (Recordar que $\sqrt{\sec^2 t - 1} = \tan t$).