Universidad Politécnica de Cartagena

Departamento de Matemática Aplicada y Estadística

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial

Examen de Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería

Electrónica Industrial, Mañana

2 de Junio de 2001

1. i) Indica el interior, la clausura y el conjunto de los puntos de acumulación de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:

$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} \setminus \{(0, 0)\}$

$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 < y, y \leq 4\}$

$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(0, 2)\}$

¿ Cuáles son abiertos? ¿Cuáles son cerrados? **(0.5 puntos)**

ii) Analiza la continuidad y la diferenciabilidad en $(0, 0)$ de la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ **(0.5 puntos)**

iii) Analiza la continuidad, existencia de derivadas direccionales, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad de la función:

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ **(1 punto)**

iv) Si $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \mid f(x, y, z) = (x^2yz + xy^2z, x^2y + xz)$ calcula su diferencial en $(1, 1, 1)$. **(0.5 puntos)**

2. i) Comprueba que la ecuación $xe^y + y\cos x = 0$ define a y como función implícita de x en un abierto de $x = 0$ donde toma el valor $y = 0$. Calcula su polinomio de Taylor de grado 2 en $x = 0$. **(1 punto)**

ii) Calcula los extremos absolutos de $f(x, y) = x^2 + (y - 2)^2$ en $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq -x^2 + 4, y \geq 0\}$. **(1.5 puntos)**

3. **i)** Analiza el carácter de la integral impropia

$$\int_1^2 \frac{2x+1}{\sqrt[3]{x^3-3x+2}}dx.$$

(0.5 puntos)

ii) Calcula las siguientes integrales:

$\int\int_\Omega xdxdy$ siendo $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2, y \leq x+2\}$. **(1 punto)**

$\int\int\int_\Omega xdxdydz$ siendo $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq 4, y \geq 0, -1 \leq z \leq 0\}$. **(1 punto)**

4. **i)** Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales:

$y^{(v)} - y^{(iv)} + y''' - y'' = 0$ **(0.5 puntos)**

$y'' + y' - 2y = -10\sin x$ **(0.75 puntos)**

ii) Resuelve los siguientes problemas de condiciones iniciales:

$$\begin{cases} y' + y^2 \tan x = 0 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$ **(0.5 puntos)**

$$\begin{cases} y' - \dfrac{1}{x}y = -x\sin x \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$$ **(0.75 puntos)**