

Universidad Politécnica de Cartagena
Departamento de Matemática Aplicada y Estadística
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial

Examen de Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería
Electrónica Industrial, Mañana

10 de Febrero de 2001

1. i) Define la suma de dos subespacios de un espacio vectorial. Demuestra que la suma de dos subespacios es subespacio.

ii) Sean $S = \langle (-1, 1, 1), (1, -1, 0), (0, 0, 1) \rangle$ y $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 2z = 0\}$.
Calcula bases de S , T , $S \cap T$ y $S + T$.

(1.3 puntos)

2. i) Define aplicación inyectiva y suprayectiva. Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal y $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base de V . Demuestra que si $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$ es un sistema generador de W entonces f es suprayectiva.

ii) Consideremos la bases $B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (-1, 0, 0)\}$ y $B' = \{(-1, -1), (-1, 0)\}$ de \mathbb{R}^3 y \mathbb{R}^2 respectivamente. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$M_{B,B'}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

i) Calcula la matriz de f respecto de las bases canónicas respectivas y su expresión analítica.

ii) Estudiar la inyectividad y suprayectividad de f . Calcula bases del núcleo y la imagen de f .

(2 puntos)

3. Consideramos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Calcula sus valores propios, estudia si es diagonalizable y en caso afirmativo calcula la matriz diagonal semejante y una matriz de paso.

(2 puntos)

4. En \mathbb{R}^2 con el producto escalar canónico, calcula la proyección ortogonal de base $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\}$.

(0.7 puntos)

5. i) Calcula

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^2 + 6^2 + \dots + (3n)^2}{n^3 + 1}.$$

ii) Demuestra que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 + 7n + 12}$$

es convergente y calcula su suma.

(0.8 puntos)

6. i) Enuncia el Teorema del valor medio de Lagrange. Calcula los valores para los cuales la función $f(x) = \begin{cases} -ax^2 + 2b & \text{si } x \leq 1 \\ bx + a + 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ satisfaga las hipótesis del Teorema del valor medio de Lagrange en el intervalo $[0, 4]$. Para dichos valores, calcula un valor donde se obtenga la tesis.

ii) Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{\sin x^2}$

iii) Calcula el polinomio de McLaurin de grado 2 de la función $f(x) = \arctan x$ y a partir de éste, obtén una aproximación de $\arctan(0.1)$. Obtén la menor posible de las cotas superiores del error cometido.

(1.7 puntos)

7. Calcula:

i) $\int \frac{-2x^2 + 7x - 4}{\sqrt{-x^2 + 4x - 3}} dx$

ii) $\int_0^1 \sqrt{4 - x^2} dx.$

(1.5 puntos)