Tema 16. Ecuaciones diferenciales

Juan Medina Molina

12 de mayo de 2005

Introducción

Dedicaremos el último tema del curso a resolver ecuaciones diferenciales de orden uno y lineales de orden superior.

Empezaremos la lección dando los conceptos básicos sobre ecuaciones diferenciales y un teorema sobre la existencia y unicidad de solución. Posteriormente, daremos métodos sobre el cálculo de soluciones de ecuaciones diferenciales de orden uno y lineales de orden superior y terminaremos la lección dando las leyes de Kirchhoff que son una aplicación directa de las ecuaciones diferenciales.

Este tema consta de los siguientes apartados:

- Definición de ecuación diferencial y problemas de condiciones iniciales. Un teorema de existencia y unicidad de solución de un problema de condiciones iniciales.

- Ecuaciones diferenciales de primer orden. Ecuaciones diferenciales homogéneas. Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. Ecuación de Bernoulli. Ecuaciones exactas. Factores integrantes.

- Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior. Existencia y unicidad de soluciones. Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas. Ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes. Ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes variables de orden 2. Ecuación diferencial lineal no homogénea de orden 2.

Definición de ecuación diferencial y problemas de condiciones iniciales

Definición 1 *Una ecuación diferencial de orden $n \in \mathbb{N}^*$ es una expresión $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ donde $F : A \longrightarrow \mathbb{R}$, siendo A un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^{n+2}$, e $y = y(x)$es una función real de variable real. Diremos que x es la variable independiente e y la variable dependiente a determinar.*

Diremos que $y :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ es una solución de la ecuación diferencial anterior si:

i) *Existe $y^{(n)}(x)$ para todo $x \in]a, b[$.*

ii) $(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) \in A$ *para todo* $x \in]a, b[$.

iii) $F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$ *para todo* $x \in]a, b[$.

Presentamos el concepto de problema de condiciones iniciales:

Definición 2 *Un problema de condiciones iniciales o de Cauchy es una ecuación diferencial $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ junto con una serie de condiciones llamadas condiciones iniciales de la forma $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, $\ldots$, $y^{(n-1)}(x_0) = y_n$, donde $(x_0, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) \in A$. Una solución de éste es una solución $y(x)$ de la ecuación diferencial que satisface $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, $\ldots$, $y^{(n-1)}(x_0) = y_n$.*

El siguiente resultado nos dice que cuando un problema de condiciones iniciales satisface ciertas hipótesis, entonces éste posee una única solución.

Teorema 1 *Sean $\epsilon, \delta > 0$, $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ y $f :]x_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon[\times]y_0 - \delta, y_0 + \delta[\longrightarrow \mathbb{R}$ continua con $\frac{\partial f}{\partial y}$ continua. Entonces existe $\lambda > 0$ tal que $0 < \lambda < \epsilon$ e $y :]x_0 - \lambda, x_0 + \lambda[\longrightarrow \mathbb{R}$ que es la única solución definida en $]x_0 - \lambda, x_0 + \lambda[$ del problema de condiciones iniciales:*

$$\left\{ \begin{array}{c} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{array} \right. .$$

Ecuaciones diferenciales de primer orden

En este apartado damos métodos para resolver algunos tipos de ecuaciones diferenciales de primer orden.

1. Ecuaciones de variables separables

Son ecuaciones de la forma

$$y' = f(y)g(x)$$

Si $f(y) \neq 0$ para todo y del dominio de f entonces se tiene

$$\frac{y'}{f(y)} = g(x)$$

Integrando en ambas partes se obtiene

$$\int \frac{y'(x)}{f(y(x))}dx = \int g(x)dx.$$

Si es posible calcular dichas primitivas, despejando $y(x)$ se obtiene una solución de dicha ecuación diferencial.

En el caso de que $f(y)$ se anula, por ejemplo, si consideramos el problema de condiciones iniciales:

$$\begin{cases} y' = yx \\ y(0) = 0 \end{cases},$$

la única solución es $y(x) = 0$. Éstas son conocidas cómo soluciones singulares del problema de Cauchy.

2. Ecuaciones homogéneas

Empezamos presentando el concepto de función homogénea.

Definición 3 *Sean $D \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que $(tx, ty) \in D$ para todo $t \in \mathbb{R}$, $(x, y) \in D$, $k \in \mathbb{R}$ y $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$.*

Se dice que f es homogénea de grado k si $f(tx, ty) = t^k f(x, y)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y para todo $(x, y) \in D$.

Entonces se dice que una ecuación diferencial de la forma

$$y' = \frac{f(x, y)}{g(x, y)}$$

es homogénea si $f(x, y)$ y $g(x, y)$ son funciones homogéneas del mismo grado $k \in \mathbb{N}$.

Para resolver ésta, hacemos el cambio de variable $v = \frac{y}{x}$ de donde se obtiene la ecuación de variables separables

$$v' = (\frac{f(1, v)}{g(1, v)} - v)\frac{1}{x}.$$

Resolviendo ésta y deshaciendo el cambio se obtiene una solución de la ecuación diferencial inicial.

3. Ecuaciones lineales de primer orden

La ecuación lineal de primer orden es de la forma

$$f_1(x)y' + f_2(x)y = g(x)$$

donde $f_1, f_2, g :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ son continuas. Si $f_1(x) \neq 0$ para todo $x \in [a, b[$, entonces dividiendo por $f_1(x)$ se obtiene

$$y' + \frac{f_2(x)}{f_1(x)} y = \frac{g(x)}{f_1(x)},$$

y llamando $p(x) = \frac{f_2(x)}{f_1(x)}$ y $q(x) = \frac{g(x)}{f_1(x)}$ se obtiene

$$y' + p(x)y = q(x).$$

Llamaremos a la ecuación diferencial $y' + P(x)y = 0$ ecuación diferencial lineal homogénea asociada.

Si resolvemos dicha ecuación, que es de variables separables, se obtiene $y = K\mathrm{e}^{\int -p(x)dx}$ donde $K > 0$ luego, si $G(x)$ es una primitiva de $-p(x)$, $y = K\mathrm{e}^{G(x)}$.

Para calcular la solución de $y' + p(x)y = q(x)$, supondremos que ésta es de la forma $y = K(x)\mathrm{e}^{G(x)}$, donde $K(x)$ es una función a determinar. Imponiendo a ésta el ser solución de dicha ecuación se obtiene que $K(x) = \int q(x)\mathrm{e}^{-G(x)}dx$ y de esto se obtiene la solución de la ecuación diferencial.

4. Ecuación de Bernoulli

Es una ecución diferencial de la forma $f_1(x)y' + f_2(x)y = f_3(x)y^\alpha$ donde $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f_1, f_2, f_3 :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$. Si $\alpha = 0$ o $\alpha = 1$, la ecuación anterior es lineal o de variables separables respectivamente.

En otro caso, si se efectúa el cambio $z = y^{1-\alpha}$, a partir de la resolución de la nueva ecuación se obtiene las soluciones de la ecuación incial.

5. Ecuaciones diferenciales exactas

Consideremos la ecuación diferencial

$$y' = \frac{-M(x, y)}{N(x, y)}$$

donde $M, N :]a, b[\times]c, d[\longrightarrow \mathbb{R}$ continuas y N no se anula. Esta ecuación puede expresarse como

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0.$$

Diremos que la ecuación anterior es exacta si existe una función $f :]a, b[\times]c, d[\longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = M(x, y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = N(x, y)$.

Entonces es sencillo demostrar que la ecuación $f(x, y) = C$, variando $C \in \mathbb{R}$, define de forma implícita a todas las soluciones y de la ecuación diferencial.

En siguiente resultado nos dice cuando una ecuación diferencial es exacta.

Teorema 2 *Consideremos la ecuación diferencial* $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$ *donde* $M, N \in \mathcal{C}^1(]a, b[\times]c, d[, \mathbb{R})$. *Entonces, la ecuación diferencial anterior es exacta si y sólo si* $\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y)$.

Para calcular la función f tal que $f(x, y) = c$ que define las soluciones y de la ecuación, impondremos a f que satisfaga las condiciones

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y) \end{array} \right. ,$$

y de ello calcularemos f.

Puede ocurrir que una ecuación diferencial de la forma $M(x, y)+N(x, y)y' = 0$ no sea exacta pero al multiplicar ésta por una función si lo que sea.

Diremos que una función continua que no se anula $\nu :]a, b[\times]c, d[\longrightarrow \mathbb{R}$ es un factor integrante de la ecuación diferencial anterior si $\nu(x, y)M(x, y) + \nu(x, y)N(x, y)y' = 0$ es exacta.

Se tiene que en ese caso, las soluciones de la segunda ecuación son soluciones de la primera.

El cálculo de factores integrantes suele ser complicado. Para su búsqueda, se suele suponer que éstos verifican alguna hipótesis adicional, como que sólo dependen de una de las variables, etcétera.

Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior

Una ecuación diferencial de orden n es una ecuación diferencial de la forma:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = c(x)$$

donde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0, c :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ son continuas.

Si $n = 1$ tenemos que la ecuación diferencial lineal de primer orden estudiada anteriormente.

Si $a_n(x) \neq 0$ para todo $x \in]a, b[$, entonces podemos escribir la ecuación diferencial anterior como:

$$y^{(n)} + \frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)} y^{(n-1)} + \ldots + \frac{a_1(x)}{a_n(x)} y' + \frac{a_0(x)}{a_n(x)} y = \frac{c(x)}{a_n(x)}$$

En primer lugar se obtiene el siguiente resultado de existencia y unicidad de solución:

Teorema 3 *El problema de condiciones iniciales*

$$\left\{ \begin{array}{c} y^{(n)} + p_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x) y' + p_0(x) y = q(x) \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0^1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1} \end{array} \right.$$

siendo $p_i, q :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ continuas, tiene una única solución definida en el intervalo $]a, b[$.

Ahora nos ocupamos de la resolución de la ecuación diferencial homogénea

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x) y' + p_0(x) y = 0$$

siendo $p_i :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ continuas, $1 \leq i \leq n$.

Teorema 4 *El conjunto de todas las soluciones de la ecuación diferencial anterior tiene estructura de $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n.*

Del resultado anterior se deduce que si $y_1, \ldots, y_n$ son n soluciones, cualquier solución y se expresa como:

$$y = c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n$$

para ciertos valores $c_1, \ldots, c_n \in \mathbf{R}$.

Así, nuestro problema se divide en:

1. Determinar n soluciones.

2. Demostrar que son linealmente independientes.

Para lo segundo, se introduce el concepto de Wronskiano:

Definición 4 *Sean $y_1, \ldots, y_n :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ son $(n-1)$-veces derivables. Se define el Wronskiano de dichas funciones como la función $\mathbf{W}(y_1, \ldots, y_n) :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$:*

$$\mathbf{W}(y_1, \ldots, y_n)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_1'(x) & \ldots & y_1^{(n-1)}(x) \\ y_2(x) & y_2'(x)(a) & \ldots & y_2^{(n-1)}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n(x) & y_n'(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Entonces se obtiene:

Proposición 1 *Las soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea de orden n* $y_1, \ldots, y_n :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ *son linealmente independientes si y sólo si* $\mathbf{W}(y_1, \ldots, y_n)(x) \neq 0$ *para todo* $x \in]a, b[$.

6. Ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes

Una ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes es una ecuación lineal homogénea:

$$y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + p_1y' + p_0y = 0,\ p_i \in \mathbb{R},\ 0, 1, \ldots, n-1.$$

Si suponemos que e^{rx} es una solución de dicha ecuación, sustituendo se obtiene:

$$r^n\mathrm{e}^{rx} + p_{n-1}r^{n-1}\mathrm{e}^{rx} + \ldots + p_1r\mathrm{e}^{r} + p_0\mathrm{e}^{r} = 0$$

y sacando factor común:

$$\mathrm{e}^{rx}(r^n + p_{n-1}r^{n-1} + \ldots + p_1r + p_0) = 0$$

de donde $r^n + p_{n-1}r^{n-1} + \ldots + p_1r + p_0 = 0$ y entonces r es raíz del polinomio $p(x) = x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \ldots + p_1x + p_0$.

Definición 5 *El polinomio característico de la ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes anterior es* $p(x) = x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \ldots + p_1x + p_0$.

Por el teorema fundamental del álgebra se tiene que $p(x) = (x - a_1)^{r_1} \cdot \ldots \cdot (x - a_j)^{r_j}(x^2 - A_1x + B_1)^{s_1} \cdot \ldots \cdot (x^2 - A_kx + B_k)^{s_k}$ donde $a_1, \ldots, a_j$ son las raíces reales de $p(x)$ y $x^2 + A_1x + B_1, \ldots, x^2 + A_kx + B_k$ tienen dos soluciones complejas conjugadas con multiplicidades $s_1, \ldots, s_k$ respectivamente.

Entonces se obtiene:

Teorema 5 *Si las raíces del polinomio característico de la ecuación difere-cial lineal con coeficientes constantes* $y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + p_1y' + p_0y = 0$ *son:*

1. $a_1, \ldots, a_j$ *con multiplicidades* $r_1, \ldots, r_j$ *respectivamente.*

2. $\alpha_1 \pm i\beta_1, \ldots, \alpha_k \pm i\beta_k$ *con multiplicidades* $s_1, \ldots, s_k$ *respectivamente.*

Entonces, los elementos de una base de las soluciones de la ecuación son:

1. *De* a_1 *se obtienen* $\mathrm{e}^{a_1 x}, x\mathrm{e}^{a_1 x}, \ldots, x^{r_1-1}\mathrm{e}^{a_1 x}$.
2. *De* a_2 *se obtienen* $\mathrm{e}^{a_2 x}, x\mathrm{e}^{a_2 x}, \ldots, x^{r_2-1}\mathrm{e}^{a_2 x}$.

   ...
3. *De* a_r *se obtienen* $\mathrm{e}^{a_r x}, x\mathrm{e}^{a_r x}, \ldots, x^{r_k-1}\mathrm{e}^{a_r x}$.
4. *De* $\alpha_1 \pm i\beta_1$ *se obtienen:*
   - $\mathrm{e}^{\alpha_1 x}\cos(\beta_1 x), x\mathrm{e}^{\alpha_1 x}\cos(\beta_1 x), \ldots, x^{s_1-1}\mathrm{e}^{\alpha_1 x}\cos(\beta_1 x)$.
   - $\mathrm{e}^{\alpha_1 x}\sin(\beta_1 x), x\mathrm{e}^{\alpha_1 x}\sin(\beta_1 x), \ldots, x^{s_1-1}\mathrm{e}^{\alpha_1 x}\sin(\beta_1 x)$.

   ...
5. *De* $\alpha_1 \pm i\beta_1$ *se obtienen:*
   - $\mathrm{e}^{\alpha_k x}\cos(\beta_k x), x\mathrm{e}^{\alpha_k x}\cos(\beta_k x), \ldots, x^{s_k-1}\mathrm{e}^{\alpha_k x}\cos(\beta_k x)$.
   - $\mathrm{e}^{\alpha_k x}\sin(\beta_k x), x\mathrm{e}^{\alpha_k x}\sin(\beta_k x), \ldots, x^{s_k-1}\mathrm{e}^{\alpha_k x}\sin(\beta_k x)$.

Ecuación diferencial lineal homogénea de orden 2 **con coeficientes variables**

Ésta ecuación diferencial tiene la forma:

$$y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x).$$

Veamos dos métodos para determinar una solución particular de dicha ecuación diferencial. **7. Método de la variación de constantes** Si $\tilde{y}(x) =$

$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ con c_1, c_2 variando $\mathbb{R}$ es la solución general de la ecuación homogénea asociada, buscaremos una solución de la forma $c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$ y además le impondremos que $c_1'(x)y_1(x)+c_2'(x)y_2(x) = 0$. Sustiyendo lo anterior en la ecuación diferencial inicial se obtiene un sistema cuyas incognitas son $c_1'(x)$ y $c_2'(x)$. Tras resolver dicho sistema se obtendrán $c_1(x)$ y $c_2(x)$, y de éstas la solución particular. **8. Método de los coeficientes**

indeterminados Supongamos que $q(x)$ es:

1. Un polinomio de grado n. Entonces supodremos que la solución particular es un polinomio de grado n y determinaremos dicho polinomio imponiéndole que es solución.

2. $q(x) = \mathrm{e}^{rx}$ siendo $r \in \mathbb{R}$. Supondremos que la solución es de la forma $y_p = A\mathrm{e}^{rx}$ y determinaremos A.

3. $q(x) = \cos(\alpha x)$ o $q(x)\sin(\alpha x)$ donde $\alpha \in \mathbb{R}$. Supondremos que la solución particular es de la forma $y_p = A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x)$ y determinaremos A y B.

4. Suma o producto de funciones de los tipos anteriores. Veamos algunos ejemplos que ilustran este caso:

   Si $q(x) = \mathrm{e}^x \sin x$, entonces buscaremos una solución particular de la forma $y_p = A\mathrm{e}^x \cos x + B\mathrm{e}^x \sin x$.

   Si $q(x) = \mathrm{e}^x x$, entonces supondremos que la solución particular es de la forma $y_p(x) = Ax\mathrm{e}^x + B\mathrm{e}^x$.

   Si $q(x) = \mathrm{e}^{2x} + x^2$, entonces supondremos que la solución particular es de la forma $y_p(x) = A\mathrm{e}^{2x} + Bx^2 + Cx + D$.

Una aplicación de las ecuaciones diferenciales. Las leyes de Kirchhoff

Para finalizar este capítulo, presentamos un ejemplo de aplicación de las ecuaciones diferenciales lineales a la Electrónica como son las leyes de Kirchhoff.

Supongamos que tenemos un circuito en serie que contiene:

- Una fuerza electromotriz (fem) E que produce una corriente I.

- Una resistencia R, que se opone al paso de corriente produciendo una caída en la fem de magnitud

$$E_R = RI \qquad \text{(Ley de Ohm)}.$$

- Un inductor de inductancia L, que se opone a cualquier variación de la corriente, produciendo una caída en la fem que viene dada por

$$E_L = L\frac{\partial I}{\partial t}.$$

- Un condensador de capacitancia C que almacena una carga Q. La carga que acumula el condensador se resiste a la entrada de nueva carga y ello lleva a una caída de la fem de magnitud

$$E_C = \frac{1}{C}Q,$$

y como la corriente es el ritmo con el que la carga se acumula en el condensador, se tiene

$$I = \frac{\partial Q}{\partial t}.$$

La ley fundamental en el estudio de los circuitos eléctricos es la ley de Kirchhoff que dice que la suma de las fuerza electromotrices entorno a un circuito cerrado es 0.

En nuestro caso

$$E - E_R - E_L - E_C = 0$$

de donde se obtiene

$$L\frac{\partial I}{\partial t} + RI + \frac{1}{C}Q = E \tag{1}$$

que es una ecuación con dos variables I y Q que dependen del tiempo.

Utilizando que $I = \frac{\partial Q}{\partial t}$ podemos eliminar I en (1) y se obtiene

$$L\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} + R\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{C}Q = E \tag{2}$$

Por otra parte, si derivamos respecto de t la ecuación (1), de nuevo usando que $I = \frac{\partial Q}{\partial t}$ podemos eliminar Q de la ecuación (1) obteniendo

$$L\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} + R\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{1}{C}I = \frac{\partial E}{\partial t} \tag{3}$$

Así, tenemos dos ecuaciones diferenciales de segundo orden (2) y (3) para la carga Q y para la corriente I respectivamente.

Observemos que hay dos casos donde el problema se reduce a una ecuación diferencial de primer orden:

- Si el circuito no contiene condensador entonces la ecuación (1) se reduce a

$$L\frac{\partial I}{\partial t} + RI = E.$$

- Si el circuito no contiene un inductor, la ecuación (2) se reduce a

$$R\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{C}Q = E.$$

Bibliografía

1. T. Apostol, *Calculus Vol. 1.* Ed. Reverte.

2. J. S. Canovas, J. A. Murillo, *Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería.* Ed. Diego Marín.

3. S. L. Ross *Ecuaciones diferenciales.* Ed. Reverte S.A.

4. G. Simmons, *Ecuaciones diferenciales.* Ed. McGraw-Hill.