INTEGRALES MULTIPLES

En este tema se estudia la integral de Riemann de funciones de varias variables. Como veremos, la forma de introducirla es similar a la de la integral de Riemann de funciones reales de variable real. Se hará el desarrollo para funciones reales de dos variables, para más de dos variables se introduce de forma análoga.

Integral doble sobre rectángulos

Definición. *Consideremos el rectángulo* $[a,b]\times[c,d]$ *y sean* $\mathcal{P}_1 = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ *y* $\mathcal{P}_2 = \{c = y_0, y_1, \ldots, y_m = d\}$ *particiones de* $[a,b]$ *y* $[c,d]$ *respectivamente. Entonces diremos que*

$$\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2 = \{(x_i, y_j) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$$

es una **partición** *de* $[a,b]\times[c,d]$*. A partir de* $\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ *se obtiene una descomposición del rectángulo como unión de los rectángulos* $R_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$, $0 \leq i \leq n-1$ $0 \leq j \leq m-1$.

Se define la norma de una partición $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ *y se denota por* $\delta(\mathcal{P})$ *como el máximo de las áreas de los rectángulos de* $\mathcal{P}$.

Si $\mathcal{P}$ *y* $\mathcal{Q}$ *son dos particiones de* $[a,b]\times[c,d]$*, diremos que* $\mathcal{P}$ *es más fina que* $\mathcal{Q}$ *si* $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}$.

Supongamos ahora que $f : [a,b]\times[c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ *está acotada.*

i) *Se define la* **suma inferior de Riemann** *de f asociada a la partición $\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ como*

$$\mathrm{s}(f, \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} m_{ij}(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)$$

donde $m_{ij} = \inf\{f(x,y) \mid (x,y) \in R_{ij}\}$.

ii) *Se define la* **suma superior de Riemann** *de f asociada a la partición $\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ como*

$$\mathrm{S}(f, \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} M_{ij}(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)$$

donde $M_{ij} = \sup\{f(x,y) \mid (x,y) \in R_{ij}\}$.

Sea $f : [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada y $(\mathcal{P}^n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de particiones de $[a,b] \times [c,d]$ tales que $\mathcal{P}^n \subseteq \mathcal{P}^{n+1}$ y $\lim_{n\to\infty} \delta(\mathcal{P}^n) = 0$. Diremos que f es integrable en $[a,b] \times [c,d]$ si existen y coinciden los límites

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{s}(f, \mathcal{P}^n) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{S}(f, \mathcal{P}^n).$$

A este valor se le llama integral de Riemann o integral de f en $[a,b] \times [c,d]$ y se denota $\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy$.

El cálculo de integrales dobles en rectángulos puede reducirse al cálculo de integrales de funciones de una variable como muestra el teorema de Fubini para rectángulos:

Teorema. *Si $f : [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable entonces*

$$\int\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy = \int_c^d (\int_a^b f(x,y)dx)dy = \int_a^b (\int_c^d f(x,y)dy)dx.$$

Cuando la función f es positiva, la integral de f en $[a,b] \times [c,d]$ coincide con el volumen delimitado por la gráfica de la función f y dicho rectángulo.

Teorema. *Si $f : [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua entonces es integrable Riemann en $[a,b] \times [c,d]$.*

Integral doble sobre recintos básicos

Un subconjunto Ω de $\mathbb{R}^2$ se dice que es un **recinto básico** si es acotado, su interior es no vacio y su frontera se puede expresar como unión de curvas $y = g_1(x)$ y $x = g_2(y)$ donde g_1 y g_2 son funciones reales de una variable continuas.

Vamos a introducir la integral de Riemann de funciones reales de dos variable definidas en recintos básicos.

Definición. *Si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada donde Ω es un recinto básico, sea $[a, b] \times [c, d]$ un rectángulo que contiene a Ω. Entonces definimos*

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si} \quad (x,y) \in \Omega \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) \notin \Omega \end{cases}$$

Entonces se dice que f es integrable en Ω si lo es $\tilde{f}$ en $[a, b] \times [c, d]$. En ese caso se define la integral de f en Ω como:

$$\int\int_{\Omega} f(x,y)dxdy = \int\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy.$$

Se puede probar que el valor de la integral no depende del rectángulo conteniendo a Ω que elijamos.

Si consideramos $1_\Omega : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ entonces $\int\int_\Omega 1_\Omega(x,y)dxdy$ coincide con el área de Ω.

Al igual que para funciones definidas en rectángulos, se obtiene:

Teorema. *Si Ω es un recinto básico de $\mathbb{R}^2$ y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua entonces es integrable Riemann en Ω.*

También se obtienen:

Proposición. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un recinto básico, $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ integrables y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces:*

i) *$\alpha f + \beta g$ es integrable en Ω y*

$$\int\int_\Omega (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y))dxdy = \alpha \int\int_\Omega f(x,y)dxdy + \beta \int\int_\Omega g(x,y))dxdy.$$

ii) *Si $f(x,y) \geq 0 \ \forall (x,y) \in \Omega$ entonces*

$$\int\int_\Omega f(x,y)dxdy \geq 0.$$

iii) *Si $f(x,y) \geq g(x,y) \ \forall (x,y) \in \Omega$ entonces*

$$\int\int_\Omega f(x,y)dxdy \geq \int\int_\Omega g(x,y)dxdy.$$

iv)

$$\int\int_\Omega f(x,y)dxdy = \int\int_{\mathrm{Int}(\Omega)} f(x,y)dxdy.$$

v) *Si $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ con $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ entonces*

$$\int\int_\Omega f(x,y)dxdy = \int\int_{\Omega_1} f(x,y)dxdy + \int\int_{\Omega_2} f(x,y)dxdy.$$

Finalmente, el teorema de Fubini permite calcular integrales en recintos básicos:

Teorema. *Sean $h, g :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ continuas con $h(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$. Si $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, h(x) \leq y \leq g(x)\}$ y $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, entonces:*

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_a^b (\int_{h(x)}^{g(x)} f(x,y)dx)dy.$$

Nota. El teorema de Fubini también se tiene para recintos de la forma $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, h(y) \leq x \leq g(y)\}$ y entonces se tiene que

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_c^d (\int_{h(y)}^{g(y)} f(x,y)dx)dy.$$

Cambios de coordenadas en $\mathbb{R}^2$

Muchas veces, los cambios de variable son necesarios para el cálculo de integrales. En $\mathbb{R}^2$ se tiene el siguiente resultado:

Teorema. *Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ y sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable. Supongamos que $\Phi : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donde Δ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ tal que $\Phi(\Delta) = \Omega$, Φ es diferenciable en Δ y $|\mathrm{J}(\Phi(u,v))| \neq 0$ para todo $(u,v) \in \Delta$. Entonces si consideramos el cambio de variable $x = \Phi_1(u,v)$, $y = \Phi_2(u,v)$ se tiene que*

$$\int\int_\Omega f(x,y)dxdy = \int\int_\Delta f(\Phi(u,v))|\det(\mathrm{J}(\Phi(u,v)))|dudv.$$

El cambio de variable que más emplearemos en $\mathbb{R}^2$ es el cambio a coordenadas polares que ya conocemos.

Cambios de coordenadas en $\mathbb{R}^3$

Como ya hemos adelantado, la integral de Riemann en $\mathbb{R}^3$ se introduce de forma análoga a la integral de Riemann en el plano. Con respecto a las integrales y los cambios de coordenadas se obtiene también un resultado análogo al obtenido en $\mathbb{R}^2$:

Teorema. *Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^3$ y sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable. Supongamos que $\Phi : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}^3$ donde Δ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^3$ tal que $\Phi(\Delta) = \Omega$, Φ es diferenciable en Δ y $|\mathrm{J}(\Phi(u,v,w))| \neq 0$ para todo $(u,v,w) \in \Delta$. Entonces si consideramos el cambio de variable $x = \Phi_1(u,v,w)$, $y = \Phi_2(u,v,w)$, $z = \Phi_3(u,v,w)$ se tiene que*

$$\int\int\int_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int\int\int_{\Delta} f(\Phi(u,v,w))|\det(\mathrm{J}(\Phi(u,v,w)))|dudvdw.$$

Los cambios de coordenadas más importantes en $\mathbb{R}^3$ son los cambios a coordenadas esféricas y cilídricas.

i) Coordenadas cilíndricas

$\Phi : \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \mid \Phi(r,\theta,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$.

Si $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ tal que $\Phi(r,\theta,z) = (x,y,z)$ entonces $r = \sqrt{x^2+y^2}$ y θ es el ángulo que forma el vector de posición del punto $(x,y,0)$ con la parte positiva del eje OX.

ii) Coordenadas esféricas

$\Phi : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\times[-\pi/2, \pi/2] \mid$

$$\Phi(r,\theta,\varphi) = (r\cos\theta\cos\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\varphi).$$

Si $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ tal que $\Phi(r,\theta,\varphi) = (x,y,z)$ entonces $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, θ es el ángulo que forma el vector de posición del punto $(x,y,0)$ con la parte positiva del eje OX y φ es el ángulo que forma el vector de posición del punto (x,y,z) con el vector de posición del punto $(x,y,0)$.