Tema 13. Continuidad de funciones de varias variables

Juan Medina Molina

8 de abril de 2005

Introducción

Iniciamos este bloque dedicado al estudio del análisis de varias variables introduciendo los conceptos topológicos que necesitaremos en los restantes temas del curso.

Las demás secciones las dedicaremos al cálculo de límites y al estudio de la continuidad de funciones de varias variables.

El tema queda dividido en los siguientes apartados:

- Topología en $\mathbb{R}^n$.
- Funciones de varias variables.
- Definición de límite de una función de varias variables. Propiedades.
- Cálculo de límites de funciones de dos variables: Límites iterados, direccionales y cambio a coordenadas polares.
- Continuidad de funciones de varias variables. Propiedades.

Topología en $\mathbb{R}^n$

En esta apartado vamos a generalizar los conceptos de intervalo, puntos interiores, conjuntos abiertos y puntos de acumulación.

En $\mathbb{R}^n$ se define la norma euclídea como $\| \, . \, \| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\| (x_1, \ldots, x_n) \|_n = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Cuando trabajemos en un único $\mathbb{R}^n$ escribiremos simplemente $\| x \|$ en lugar de $\| x \|_n$.

Se tiene que es norma ya que verifica:

i) $\| x \| \geq 0 \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$ y $\| x \| = 0$ si y sólo si $x = 0$.

ii) $\| \alpha x \| = |\alpha| \ \| x \| \ \forall\, \alpha \in \mathbb{R}, \forall\, x \in \mathbb{R}^n$.

iii) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \| \ \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$.

Si $n = 1$ se tiene que $\| x \| = |x|$.

La distancia euclídea en $\mathbb{R}^n$ es la distancia asociada a la norma anterior, o sea, $\mathrm{d}(x, y) = \| x - y \| \ \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$.

Si $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$ se define la bola abierta de centro x_0 y radio r como $\mathrm{B}(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \ \| x - x_0 \| < r\}$. En $\mathbb{R}$ se tiene que $\mathrm{B}(x_0, r) =]x_0 - r, x_0 + r[$, en $\mathbb{R}^2$, $\mathrm{B}(x_0, r)$ es el interior de la circunferencia de centro x_0 y radio r y en $\mathbb{R}^3$, $\mathrm{B}(x_0, r)$ es el interior de la esfera de centro x_0 y radio r.

Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $x_0 \in A$, se dice que x_0 es un punto interior de A si existe un $r > 0$ tal que $\mathrm{B}(x_0, r) \subseteq A$. El conjunto de todos los puntos interiores de A es denotado por $\mathrm{Int}(A)$. Por definición se tiene que $\mathrm{Int}(A) \subseteq A$.

Se dice que $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto si $\mathrm{Int}(A) = A$.

Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$, se dice que x_0 es un punto de clausura de A si para todo $r > 0$ se tiene que $\mathrm{B}(x_0, r) \cap A \neq \emptyset$. El conjunto de todos los puntos de clausura de A es denotado por $\mathrm{Cl}(A)$. Por definición se tiene que $A \subseteq \mathrm{Cl}(A)$.

Se dice que $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto cerrado si $\mathrm{Cl}(A) = A$.

Se verifica que A es abierto si y sólo si $\mathbb{R}^n \setminus A$ es cerrado y A es cerrado si y sólo si $\mathbb{R}^n \setminus A$ es abierto.

Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$, se dice que x_0 es un punto de acumulación de A si para todo $r > 0$ se tiene que $(\mathrm{B}(x_0, r) \setminus \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset$. si $x_0 \in A$ no es un punto de acumulación de A, se dice que es un punto aislado de A. El conjunto de los puntos de acumulación de A es denotado por A' y se le llama conjunto derivado de A. Observemos que todo punto de un conjunto abierto es punto de acumulación de éste.

Funciones de varias variables

Definición 1 *Una función de varias variables es una aplicación $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ siendo $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $n, m \in \mathbb{N}^*$ y $n > 1$. Si $m = 1$ diremos que f es un función real de varias variables.*

Entonces se puede expresar

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)).$$

Se dice que $f_i : D \longrightarrow \mathbb{R}$ son las funciones coordenadas de f, $1 \leq i \leq m$. Se tiene que si $p_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $p_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ $1 \leq i \leq m$, que son las proyecciones de $\mathbb{R}^n$, entonces $f_i = p_i \circ f$ $1 \leq i \leq m$.

Así, las funciones coordenadas son funciones reales de varias variables.

Definición 2 *Una función de varias variables $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ siendo $D \subseteq \mathbb{R}^n$, se dice que está acotada si existe un $r > 0$ tal que $f(D) \subseteq \mathrm{B}(0, r)$.*

Límite de funciones de varias variables

Como una generalización del concepto de límite de funciones reales de variable real se tiene:

Definición 3 *Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $x_0 \in D'$ y $l \in \mathbb{R}^m$. Diremos que $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in D$ verifica que $0 <\| x - x_0 \|_n < \delta$ entonces $\| f(x) - l \|_m < \epsilon$.*

Observemos que está definición coincide con la dada para funciones reales de variable real.

Al igual que en una variable, se tiene que el límite si existe es único y además, con respecto al límite y las operaciones entre funciones se tiene:

Proposición 1 *Sean $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $x_0 \in D'$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Supongamos que $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$ y $\lim_{x \to x_0} g(x) = l_2$. Entonces:*

i) $\lim_{x \to x_0} (\alpha f + \beta g)(x) = \alpha\ l_1 + \beta\ l_2$.

ii) *Si* $m = 1$ $\lim_{x \to x_0} (f \cdot g) = l_1 \cdot l_2$.

iii) *Si* $m = 1$, $l_2 \neq 0$ *y* $g(x) \neq 0$ $\forall x \in D$ *entonces* $\lim_{x \to x_0} (\frac{f}{g})(x) = \frac{l_1}{l_2}$.

Además, el cálculo de límites de funciones de varias variables se reduce al cálculo de límites de funciones reales de varias variables:

Proposición 2 *Si $D \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ con funciones coordenadas $f_1, f_2, \ldots, f_m$ entonces $\lim_{x \to x_0} f(x) = l = (l_1, l_2, \ldots, l_m)$ si y sólo si $\lim_{x \to x_0} f_i(x) = l_i$, $1 \leq i \leq m$.*

Cálculo de límites de funciones de dos variables

A partir de ahora nos restringiremos a funciones reales de dos variables.

Sea $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ y $(x_0, y_0) \in D'$. Veamos técnicas para reducir el cálculo de $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ al cálculo del límite de funciones reales de variable real.

Las dos primeras técnicas no permiten asegurar, en caso de existir, el valor del límite, aunque permiten algunas veces darnos el valor del candidato a límite o incluso asegurarnos la no existencia del límite.

1. Límites Iterados

Proposición 3 *Supongamos que* $l_{x,y} = \lim_{y\to y_0}(\lim_{x\to x_0} f(x,y)) \in \mathbb{R}$ *y* $l_{y,x} = \lim_{x\to x_0}(\lim_{y\to y_0} f(x,y)) \in \mathbb{R}$. *Si existe* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l$, *entonces* $l_{x,y} = l_{y,x} = l$.

Como consecuencia del resultado anterior:

1. Si $l_{x,y}, l_{y,x} \in \mathbb{R}$ y $l_{x,y} \neq l_{y,x}$ entonces no existe $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l$.
2. Si $l_{x,y}, l_{y,x} \in \mathbb{R}$ y coinciden entonces, el único valor que puede tomar $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ es $l_{x,y} = l_{y,x}$ pero no podemos asegurar que exista dicho límite.
3. Puede no existir $l_{x,y}$ o $l_{y,x}$ o los dos y que exista $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$.

2. Límites direccionales

En el caso de funciones reales de variable real, dado un punto de acumulación del dominio, podemos aproximarnos a éste por puntos del dominio por la izquierda o por la derecha. Cuando el dominio de la función es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$, el número de formas de aproximarnos suele ser mayor e incluso diferente ya que podríamos aproximarnos por parábolas, etc...

Así, introducimos el concepto de límite direccional:

Definición 4 *Sea* $g(x)$ *una función real de variable real tal que* $x_0 \in \mathbf{Dom}(g)'$ *y* $\lim_{x\to x_0} g(x) = y_0$. *Se define el límite direccional de* $f(x,y)$ *a lo largo de* g *en* (x_0, y_0) *como* $l_g = \lim_{x\to x_0} f(x, g(x))$.

Entonces se tiene:

Proposición 4 *Si existe* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l \in \mathbb{R}$ *entonces* $l = l_g$ *para toda función* g *que satisface las propiedades que aparecen en la definición anterior.*

Así:

1. Si encontramos dos funciones g_1 y g_2 que satisfacen la definición de límite direccional tales que $l_{g_1} \neq l_{g_2}$ entonces podemos afirmar que no existe $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$.

2. Si $l_g \notin \mathbb{R}$ para alguna función g entonces podemos afirmar que no existe $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$.

3. Si existe $l_g \in \mathbb{R}$ entonces si existe $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$, éste coincide con l_g.

A partir de ahora nos restringiremos al cálculo de límites en $(0,0)$ ya que $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ coincide con $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x+x_0, y+y_0)$.

Para intentar demostrar que un cierto límite no existe, utilizaremos funciones del tipo $g(x) = mx^n$. Algunos ejemplos que presentamos en clase ilustran la forma de encontrar el n apropiado.

3. Paso a coordenadas polares

Presentamos un resultado que muestra como se calcula el límite de una función en $(0,0)$ usando coordenadas polares.

Aprovechando lo visto en el repaso de números complejos al inicio del curso, se puede establecer una biyección $\Phi : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow]0,+\infty[\times[0,2\pi[$ tal que $\Phi(x,y) = (+\sqrt{x^2+y^2}, \theta)$ donde θ es el ángulo que forma el vector de posición del punto (x,y) con la parte positiva del eje OX.

Si $\Phi(x,y) = (r,\theta)$ entonces se dice que (r,θ) son las coordenadas polares de (x,y) y entonces $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$.

Presentamos un resultado que muestra como se calcula el límite de una función en $(0,0)$ usando coordenadas polares.

Proposición 5 *Sea $D \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que $(0,0) \in D'$ y $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Si existe $l \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{r\to 0} f(r,\theta) = l$ para todo $\theta \in [0,2\pi[$ y $|f(r,\theta) - l| \leq F(r)$ para todo $\theta \in [0,2\pi[$ donde F es una función real de variable real que satisface $\lim_{r\to 0} F(r) = 0$, entonces $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = l$.*

Continuidad de funciones de varias variables

En primer lugar, damos la definición de continuidad de funciones de varias variables que generaliza la dada para funciones reales de variable real:

Definición 5 *Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in D$.*

i) *Si* $x_0 \notin D'$, *diremos que* f *es continua en* x_0.

ii) *Si* $x_0 \in D'$, *diremos que* f *es continua en* x_0 *si* $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Observemos que el estudio de la continuidad de una función se reduce al cálculo de límites.

Presentamos las propiedades de la continuidad de funciones de varias variables con respecto a la operaciones entre funciones:

Proposición 6 *Sean* $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *y* $x_0 \in D$. *Supongamos que* f, g *son continuas en* x_0. *Entonces:*

i) $\alpha f + \beta g$ *es continua en* x_0.

ii) *Si* $m = 1$ *entonces* $f \cdot g$ *es continua en* x_0.

iii) *Si* $m = 1$ *y* $g(x) \neq 0$ *para todo* $x \in D$ *entonces* $\frac{f}{g}$ *es continua en* x_0.

Proposición 7 *Sean* $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $\tilde{D} \subseteq \mathbb{R}^m$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *y* $g : \tilde{D} \longrightarrow \mathbb{R}^l$ *siendo* $f(D) \subseteq \tilde{D}$. *Supongamos que* $x_0 \in D$ *tal que* f *es continua en* x_0 *y* g *es continua en* $f(x_0)$. *Entonces* $g \circ f$ *es continua en* x_0.

Acabamos el tema presentando el teorema de Weierstrass para funciones de varias variables:

Definición 6 *Si* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *es una función continua, siendo* $D \subseteq \mathbb{R}^n$ *cerrado y acotado, entonces* $f(D)$ *es un conjunto cerrado y acotado.*

Bibliografía

1. T. Apostol, *Calculus Vol. 2.* Ed. Reverte.

2. G. Bradley, K. Smith, *Cálculo de varias variables.* Ed. Prentice Hall.

3. J. Burgos, *Cálculo infinitesimal de varias variable.* Ed. McGraw-Hill.

4. J. S. Canovas, J. A. Murillo, *Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería.* Ed. Diego Marín.

5. A. de la Villa, A. García, A. López, G. Rodríguez, S. Romero, *Teoría y problemas de funciones de varias variables.* CLAGSA.

6. J. Fernández, M. Sánchez, *Ejercicios y complementos de análisis matemático II.* Ed. Tecnos.

7. M. Franco, F. Martínez, R. Molina, *Lecciones de cálculo infinitesimal II.* S. P. Universidad de Murcia.

8. G. Thomas, R. Finney, *Cálculo de varias variable.* Ed. Addison Wesley.