Tema 12. Integrales impropias

Juan Medina Molina

31 de marzo de 2005

Introducción

En este tema trataremos el estudio de las integrales impropias que pueden ser de dos tipos, integrales donde el intervalo de integración no está acotado, o bien, integrales donde la función a integrar no está acotada.

Este tema presenta grandes analogías con el tema de sucesiones y series, por lo que es muy recomendable que se compare ambos temas durante su estudio.

Para el desarrollo hemos considerado los siguientes apartados:

- Integrales impropias de primera especie. Criterios de convergencia: Criterio de comparación, criterio del límite y criterio de la integral para series numéricas.
- Integrales impropias de segunda especie. Criterios de convergencia: Criterio de comparación y criterio del límite.

Integrales impropias de primera especie

Las integrales impropias de primera especie son aquellas donde algunos de los límites de integración es infinito.

Definición 1 *i) Si $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ tal que f es integrable en $[a, b]$ para todo $b > a$, se define*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx.$$

Si el valor anterior es finito, diremos que la integral anterior es convergente, si es $+\infty$ o $-\infty$ diremos que es divergente y si no existe diremos que es oscilante.

ii) *Si* $f :]-\infty, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* f *es integrable en* $[b, a]$ *para todo* $b < a$, *se define*

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{t \to -\infty} \int_{t}^{a} f(x)dx.$$

Si el valor anterior es finito, diremos que la integral anterior es convergente, si es $+\infty$ *o* $-\infty$ *diremos que es divergente y si no existe diremos que es oscilante.*

iii) *Si* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *integrable en* $[a, b]$ *para todo* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, *entonces diremos que la integral impropia* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ *es convergente si existe* $a \in \mathbb{R}$ *tal que* $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ *y* $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ *son convergentes y en ese caso se define*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx.$$

Se verifica que el valor anterior no depende del $a \in \mathbb{R}$ escogido.

Definición 2 *Si* $f :]-\infty, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, *se define el valor principal de* f *en* $]-\infty, +\infty[$ *como*

$$\mathbf{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t \to \infty} \int_{-t}^{t} f(x)dx.$$

Entonces se tiene el siguiente resultado:

Proposición 1 *Si* $f :]-\infty, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ *es convergente, entonces*

$$\mathbf{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x$ muestra que el recíproco del resultado anterior no es cierto. Al igual que en la integral de Riemann, las integrales impropias son fáciles de calcular cuando se conoce una primitiva del integrando.

Teorema 1 *i)* *Si* $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ *es convergente y* $F(x)$ *es una primitiva de* $f(x)$, *entonces:*

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t \to +\infty} F(t) - F(a).$$

ii) *Si* $f :]-\infty, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ *es convergente y* $F(x)$ *es una primitiva de* $f(x)$*, entonces:*

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = F(a) - \lim_{t \to -\infty} F(t).$$

iii) *Si* $f :]-\infty, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ *es convergente y* $F(x)$ *es una primitiva de* $f(x)$*, entonces:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x \to +\infty} F(x) - \lim_{x \to -\infty} F(x).$$

Como ya sabemos, puede que sea muy difícil o incluso imposible encontrar una primitiva de una función dada. Así, sería muy interesante obtener criterios que permitan conocer el carácter de una integral impropia sin conocer su valor.

Vamos a introducir criterios para funciones $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, +\infty[$. De forma análoga se tienen los criterios para integrales impropias del tipo $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ siendo $f(x) \geq 0$ para todo $x \in]-\infty, a[$. Se observa enseguida la analogía entre estos criterios y los que se tiene para las series de términos positivos. Más tarde introduciremos un resultado que relaciona ambos conceptos.

Proposición 2 *Sea* $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) \geq 0$ *para todo* $x \in [a, +\infty[$*, siendo* f *integrable en* $[a, b]$ *para todo* $b > a$*. Si* $\lim_{x \to +\infty} f(x) > 0$ *entonces* $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ *es divergente.*

Así, aplicando este criterio se obtiene la divergencia de integrales impropias del tipo $\int_{a}^{+\infty} x^n dx$ siendo $a > 0$ y $n \geq 0$ o de $\int_{1}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^2+2} dx$, pero no podemos decir nada sobre el carácter de la integral impropia $\int_{0}^{+\infty} \mathbf{e}^{-x^2} dx$.

Los siguientes criterios permiten deducir el carácter de ciertas integrales impropias a partir del conocimiento del carácter de integrales impropias de otras funciones.

Proposición 3 *Sean* $f, g : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *positivas tales que* f, g *son integrables en* $[a, b]$ *para todo* $b > a$ *y supongamos que* $f(x) \geq g(x)$ *para todo* $x \in [a, +\infty[$*. Entonces:*

i) *Si* $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ *es convergente, entonces* $\int_{a}^{+\infty} g(x)dx$ *es convergente.*

ii) *Si* $\int_{a}^{+\infty} g(x)dx$ *es divergente, entonces* $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ *es divergente.*

El siguiente criterio se le conoce como criterio del límite:

Proposición 4 *Sean $f, g : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ positivas tales que f, g son integrables en $[a, b]$ para todo $b > a$. Sea $l = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R}$. Entonces:*

i) *Si $l > 0$, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ es convergente (divergente) si y sólo si $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ es convergente (divergente).*

ii) *Si $l = 0$ y $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ es divergente, entonces $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ es divergente.*

iii) *Si $l = 0$ y $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ es convergente, entonces $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ es convergente.*

Es sencillo demostrar que si $a > 0$, entonces $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}$ es convergente si $\alpha > 1$ y divergente si $\alpha \leq 1$.

El criterio anterior juntos con el carácter de las integrales impropias anteriores permiten obtener el carácter de muchas integrales impropias.

El resultado anterior relaciona los conceptos de serie e integral impropia:

Proposición 5 *Sea $f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ decreciente, continua y positiva tal que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Entonces $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ es convergente si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ es convergente.*

De este resultado se deduce por ejemplo que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ es convergente si $\alpha > 1$ y divergente si $\alpha \leq 1$.

Introducimos la convergencia absoluta:

Definición 3 *Si $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, se dice que $\int_a^{\infty} f(x)dx$ es absolutamente convergente si $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ es convergente.*

Al igual que en series se obtiene:

Proposición 6 *Una integral impropia de primera especie absolutamente convergente es convergente.*

Integrales impropias de segunda especie

Definición 4 *i)* *Si $f[a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ integrable en $[a, c]$ para todo $c \in]a, b[$ y $\lim_{x\to b^-} f(x) = \infty$, se define $\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)dx$.*

Si este límite es finito, se dice que la integral impropia es convergente, si es infinito se dice que es divergente y si no existe se dice que es oscilante.

ii) *Si* $f :]a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *integrable en* $[c, b]$ *para todo* $c \in]a, b[$ *y* $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$, *se define* $\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)dx$.

Si este límite es finito, se dice que la integral impropia es convergente, si es infinito se dice que es divergente y si no existe se dice que es oscilante.

En los resultados que se enuncian desde este punto hasta el final de la sección, las integrales impropias que aparecen tienen su singularidad en el límite inferior. Los resultados análogos para cuando se tiene la singularidad en el extremo superior son también ciertos.

También, para este tipo de integrales impropias se tiene un resultado análogo a la regla de Barrow:

Proposición 7 *Sea* $f :]a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$, *siendo* $\int_a^b f(x)dx$ *convergente. Si* $F(x)$ *es una primitiva de* $f(x)$, *entonces:*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - \lim_{t\to a^+} F(t).$$

También se tienen un criterio de comparación y un criterio del límite:

Proposición 8 *Sean* $f, g :]a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *positivas, integrables en* $[c, b]$ *para todo* $c \in]a, b[$ *tales que* $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = \infty$. *Si* $f(x) \geq g(x)$ *para todo* $x \in]a, b]$ *entonces:*

i) *Si* $\int_a^b f(x)dx$ *es convergente, entonces* $\int_a^b g(x)dx$ *es convergente.*

ii) *Si* $\int_a^b g(x)dx$ *es divergente, entonces* $\int_a^b f(x)dx$ *es divergente.*

Proposición 9 *Sean* $f, g :]a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *positivas, integrables en* $[c, b]$ *para todo* $c \in]a, b[$ *tales que* $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = \infty$. *Sea* $l = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R}$. *Entonces:*

i) *Si* $l \neq 0$, $\int_a^b f(x)dx$ *es convergente si y sólo si* $\int_a^b g(x)dx$ *es convergente.*

ii) *Si* $l = 0$ *y* $\int_a^b g(x)dx$ *es convergente, entonces* $\int_a^b f(x)dx$ *es convergente.*

iii) *Si* $l = 0$ *y* $\int_a^b f(x)dx$ *es divergente, entonces* $\int_a^b g(x)dx$ *es divergente.*

De este criterio, junto con el hecho de que para funciones del tipo $f(x) = \frac{1}{(x-a)^\alpha}$ se tiene que $\int_a^b \frac{1}{(x-x_0)^\alpha}dx$ es convergente si $\alpha < 1$ y divergente si $\alpha \geq 1$, se obtiene la convergencia de muchas integrales impropias de segunda especie.

Definición 5 *Si* $f :]a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$*, se dice que* $\int_a^b f(x)dx$ *es absolutamente convergente si* $\int_a^b |f(x)|dx$ *es convergente.*

Entonces se obtiene:

Proposición 10 *Una integral impropia de segunda especie absolutamente convergente es convergente.*

Bibliografía

1. T. Apostol, *Calculus Vol.* 1. Ed. Reverte.

2. G. Bradley, K. Smith, *Cálculo de una variable.* Ed. Prentice Hall.

3. J. Burgos, *Cálculo infinitesimal de una variable.* Ed. McGraw-Hill.

4. J. S. Canovas, J. A. Murillo, *Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería.* Ed. Diego Marín.

5. F. Coquillat, *Cálculo integral (Metodología y problemas).* Ed. Autor.

6. A. de la Villa, A. García, *Cálculo I: Teoría y problemas de análisis matemático de una variable.* CLAGSA.

7. B. P. Demidovich, *5000 problemas de análisis matemático.* Ed. Paraninfo.

8. B. P. Demidovich, *Problemas y ejercicios de análisis matemático.* Ed. Paraninfo.

9. J. Fernández, M. Sánchez, *Ejercicios y complementos de análisis matemático I.* Ed. Tecnos.

10. M. Franco, F. Martínez, R. Molina, *Cálculo I.* Ed. Diego Marín.

11. G. Thomas, R. Finney, *Cálculo de una variable.* Ed. Addison Wesley.