Tema 9. La recta real. Sucesiones y series numéricas

Juan Medina Molina

22 de diciembre de 2004

Con esta tema iniciamos el bloque del curso dedicado al análisis de una variable. Comenzaremos la lección presentando la topología que necesitaremos a lo largo de este bloque. La segunda parte la dedicaremos al estudio de las sucesiones de números reales donde, después de repasar todo lo que ya ha sido estudiado en la Educación Secundaria sobre ellas, introduciremos dos nuevos métodos que permiten calcular límites de sucesiones como son el criterio del emparedado y el criterio de Stolz. Dedicaremos la última parte de la lección al estudio de las series númericas.

El tema se ha estructurado en los siguientes apartados:

- Topología de la recta real.
- Definición de sucesión y formas de representarla, tipos de sucesiones. Convergencia de sucesiones. Propiedades.
- Cálculo de límites. Repaso de algunos métodos ya estudiados anteriormente. Criterios del emparedado y de Stolz.
- Definición de serie numérica. Convergencia y suma de una serie numérica.
- Algunas series sumables: Series geométricas, aritmético-geométricas y telescópicas.
- Algunos criterios para el análisis de la convergencia de una serie numérica. Convergencia absoluta.

Topología de la recta real

Para empezar este tema, presentaremos algunos conceptos de topología de la recta real.

Definición 1 *Si $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ se define:*
i) $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$.
ii) $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$.
iii) $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$.
iv) $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$.
v) $[a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$.
vi) $]a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$.
vii) $]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$.
viii) $]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$.

Pasamos a dar los conceptos de punto de acumulación y punto interior de subconjunto de $\mathbb{R}$, fundamentales para los conceptos de límite y derivada respectivamente.

Definición 2 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathbb{R}$.*

i) Diremos que x_0 es un punto interior de A si existe $r > 0$ tal que $]x_0 - r, x_0 + r[\subseteq A$.

ii) Diremos que x_0 es un punto de acumulación de A si existe $r > 0$ tal que $]x_0 - r, x_0 + r[\setminus \{x_0\} \cap A \neq \emptyset$. En otro caso diremos que x_0 es un punto aislado de A.

No es difícil observar que x_0 es un punto de acumulación de A si siempre podemos encontrar puntos de A distintos de x_0 tan próximos a x_0 como queramos.

Definición 3 *Si $a, b \in \mathbb{R}$ se define la distancia entre a y b como* $\mathbf{d}(a, b) = |a - b|$.

Definición de sucesión y primeras propiedades. Convergencia

Definición 4 *Una sucesión de números reales es una aplicación*

$$\mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que la imagen de un $n \in \mathbb{N}^*$ es a_n.

Denotaremos esta sucesión por $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ o simplemente por a_n.

Si no ocurre ninguno de los casos anteriores, diremos que la sucesión es oscilante.

Denotaremos por $\lim_{n\to\infty} a_n$ *al límite cuando* n *tiende a* ∞ *de* a_n.

Proposición 1 *Si una sucesión* a_n *es convergente entonces su límite es único.*

Para acabar este apartado introducimos el consepto de sucesión de Cauchy:

Definición 8 *Un sucesión de números reales* a_n *se dice que es de Cauchy si para cada* $\epsilon > 0$ *existe un* $n_0 \in \mathbb{N}^*$ *tal que si* $n, m \geq n_0$ *entonces* $|a_n - a_m| < \epsilon$.

Entonces se obtiene:

Proposición 2 *Toda sucesión de Cauchy es convergente.*

Nota.

La importancia del resultado anterior es que en ciertos casos se puede afirmar la convergencia de una sucesión sin tener que conocer el valor de su límite.

Cálculo de límites. Repaso de algunos métodos ya estudiados anteriormente. Criterios del emparedado y de Stolz.

Con respecto al límite de sucesiones cuyos términos generales son polinomios, se obtiene:

Proposición 3 *i) Si* $a_n = \alpha$ *para todo* $n \in \mathbb{N}^*$ *entonces* $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$.

ii) Si k *es un número real positivo entonces* $\lim_{n\to\infty} n^k = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} -n^k = -\infty$ *y* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$.

Proposición 4 *Si* a_n *es un polinomio de grado mayor que 0 y* a *es el coeficiente del monomio de mayor grado entonces:*

i) $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ *si* $a > 0$.

ii) $\lim_{n\to\infty} -a_n = -\infty$ *si* $a < 0$.

Con respecto a las operaciones entre sucesiones se obtiene:

Formas de definir una sucesión:

1. Por un número finito de términos que me determinan totalmente la sucesión.

Por ejemplo:

La sucesión $2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots$, o la sucesión $1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$.

2. Por su término general, que es una expresión que da la imagen de un término genérico de la sucesión a_n en función de n.

Por ejemplo:

La sucesión $a_n = \frac{n^2+1}{n+1}$ o la sucesión $b_n = n^2 - 2$.

3. Por recurrencia, donde cada término se obtiene a partir de los anteriores.

Por ejemplo:

La sucesión $a_1 = 2$, $a_n = a_{n-1} + 3$ para todo $n > 1$.

Definición 5 *Sea a_n una sucesión de números reales.*

i) Diremos que a_n es creciente si $a_n \leq a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

ii) Diremos que a_n es decreciente si $a_n \geq a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

iii) Diremos que a_n es monótona si es creciente o decreciente.

iv) Diremos que a_n es estrictamente creciente si $a_n < a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

v) Diremos que a_n es estrictamente decreciente si $a_n > a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Definición 6 *Sea a_n una sucesión de números reales.*

i) Diremos que a_n está acotada superiormente si existe un $k \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \leq k$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Entonces diremos que k es una cota superior de a_n.

ii) Diremos que a_n está acotada inferiormente si existe un $m \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \geq m$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Entonces diremos que m es una cota inferior de a_n.

iii) Diremos que a_n está acotada si lo está superior e inferiormente.

Definición 7 *Sea a_n una sucesión de números reales y $l \in \mathbb{R}$.*

i) Diremos que el límite cuando n tiende a ∞ de a_n es l si para todo $\epsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $|a_n - l| < \epsilon$. En ese caso diremos que la sucesión es convergente y converge a l.

ii) Diremos que el límite cuando n tiende a ∞ de a_n es $+\infty$ si para todo $k \in \mathbb{R}$ existe un $n_0 \in \mathbb{R}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $a_n > k$. En ese caso diremos que la sucesión es divergente y diverge a $+\infty$.

iii) Diremos que el límite cuando n tiende a ∞ de a_n es $-\infty$ si para todo $m \in \mathbb{R}$ existe un $n_0 \in \mathbb{R}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $a_n < k$. En ese caso diremos que la sucesión es divergente y diverge a $-\infty$.

Proposición 5 *Sean a_n y b_n sucesiones de números reales tales que* $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ *y* $\lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$. *Entonces:*

i) $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$.

ii) $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b$.

iii) $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$.

iv) Si $b_n \neq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{R}$ *y* $b \neq 0$ *entonces* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

v) $\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^b$.

Proposición 6 *Si* $a \in \mathbb{R}$ *y* $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ *entonces:*

i) $\lim_{n\to\infty} a^{a_n} = 0$ *si* $-1 < a < 1$.

ii) $\lim_{n\to\infty} a^{a_n} = +\infty$ *si* $a > 1$.

iii) La sucesión es oscilante si $a < -1$.

De forma análoga se obtiene:

Proposición 7 *Si* $a \in \mathbb{R}$ *y* $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ *entonces:*

i) $\lim_{n\to\infty} a^{a_n} = +\infty$ *si* $0 < a < 1$.

ii) $\lim_{n\to\infty} a^{a_n} = 0$ *si* $|a| > 1$.

iii) La sucesión es oscilante si $-1 < a < 0$.

Proposición 8 *Supongamos que a_n es una sucesión monótona creciente y acotada superiormente. Entonces a_n es convergente.*

De la misma forma se obtiene:

Proposición 9 *Supongamos que a_n es una sucesión monótona decreciente y acotada inferiormente. Entonces a_n es convergente.*

Presentamos dos criterios que permiten el cálculo de algunos tipos de sucesiones.

El primero es conocido como el criterio de Stolz:

Proposición 10 *i) Sean a_n y b_n sucesiones de números reales tales que* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$. *Si b_n es estrictamente decreciente entonces:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}.$$

i) Sean a_n y b_n sucesiones de números reales tales que $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \infty$. *Si b_n es estrictamente creciente entonces:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}.$$

El segundo se conoce como el criterio del emparedado:

Proposición 11 *Sean a_n, b_n y c_n sucesiones de números reales tales que $a_n \leq b_n \leq c_n$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = l$. Entonces $\lim_{n\to\infty} b_n = l$.*

Finalmente abordamos la indeterminación 1^∞.

Proposición 12 *Sean a_n y b_n sucesiones tales que $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, existe una $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $a_n \neq 1$ para todo $n \geq n_0$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \mathrm{e}^{\lim_{n\to\infty} b_n(a_n-1)}.$$

Definición de serie numérica. Convergencia y suma de una serie numérica

Definición 9 *Sea a_n una sucesión de números reales. A partir de ésta construimos la siguiente sucesión:*

$S_1 = a_1$.
$S_2 = a_1 + a_2$.
$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$.
...
$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.
...

Llamaremos serie asociada a a_n a la sucesión S_n. Denotaremos a dicha sucesión por $(\sum_{n=1}^{\infty} a_n)$ o por $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. A esta sucesión también se le llama sucesión de sumas parciales.

Diremos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente si lo es la sucesión S_n. Si $\lim_{n\to\infty} S_n = a$, escribiremos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$ y diremos que la suma de dicha serie es a. Diremos que la serie es divergente si el límite es $+\infty$ o $-\infty$. En otro caso, diremos que la serie es oscilante.

Ejemplo
La serie $(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n})$ tiene por términos:
$1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}, \ldots$

Denotaremos por $\sum a_n$ una serie donde el primer término de a_n para el que comenzamos a sumar no queda determinado, siendo posible cualquier valor $n \in \mathbb{N}$.

Algunas series sumables: Series geométricas, aritmético-geométricas y telescópicas

En algunos casos, no es difícil el cálculo de la suma de una serie. En este apartado presentamos la forma de calcular la suma de los siguientes tipos de series:

1. Series geométricas:

Son de la forma $\sum a_n$ donde a_n es un progresión aritmética de primer término a y razón r.

Entonces, es sencillo ver que $\sum a_n$ vale:

1. $\sum a_n = \frac{a}{1-r}$ si $-1 < r < 1$.
2. ∞ si $r \geq 1$.
3. La serie es oscilante si $r < -1$.

2. Series aritmético-geométricas:

Son de la forma $\sum a_n \cdot b_n$ donde a_n es una progresión aritmética de primer término a y diferencia d, y b_n es una progresión geométrica de primer término b y razón r. Entonces, si $|r| < 1$ se tiene que

$$\sum a_n b_n = \frac{ab}{1-r} + \frac{dar}{(1-r)^2}.$$

3. Series telescópicas: Son de la forma $\sum a_n$ donde $a_n = b_n - b_{n+1}$ siendo b_n una sucesión cualquiera. Si consideramos por ejemplo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, la sucesión de sumas parciales sería:

$S_n = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \ldots + (b_{n-1} - b_n) + (b_n - b_{n-1}) = b_1 - b_{n+1}$ y así:

$$\sum a_n = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_{n+1} = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Algunos criterios para el análisis de la convergencia de una serie numérica. Convergencia absoluta.

En este apartado damos algunos criterios que aunque no permiten conocer la suma de una serie, sí nos dicen si ésta es convergente o divergente.

Proposición 13 *Si $\sum a_n$ es convergente entonces* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

El resultado anterior permite descartar la convergencia de series $\sum a_n$ tales que $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$.

Series de términos positivos

Claramente, una serie de términos positivos es siempre o convergente (cuando las sucesión de las sumas parciales es acotada) o divergente a $+\infty$.

El primer resultado que se obtiene es:

Proposición 14 *Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ series de términos positivos tales que $a_n \leq b_n$. Entonces:*

I) *Si $\sum b_n$ es convergente entonces $\sum a_n$ es convergente.*

II) *Si $\sum a_n$ es divergente entonces $\sum b_n$ es divergente.*

El siguiente resultado estudia la convergencia de algunas series:

Proposición 15 *i) La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente (ésta es concida como la serie armónica).*

ii) En general, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ es divergente si $0 \leq \alpha \leq 1$ y es convergente si $\alpha > 1$.

iii) $\sum_{n=0}^{\infty} n^\alpha$ es divergente (Esto es consecuencia del primer resultado de este apartado).

iv) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \pi^2/6$.

Definición 10 *Diremos que dos series tienen el mismo carácter si ambas son convergentes o ambas son divergentes.*

Además se obtiene:

Proposición 16 *Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ series de términos positivos. Si existe $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = a$ con $a \neq 0$, $a \neq \infty$ entonces $\sum a_n$ y $\sum b_n$ tienen el mismo carácter.*

El criterio anterior permite obtener el carácter de series que son cocientes de polinomios a partir del carácter de series del tipo $\sum \frac{1}{n^\alpha}$.

A continuación se tiene el criterio de cociente:

Proposición 17 *Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos. Si $r = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ entonces:*

I) *Si $r < 1$ entonces $\sum a_n$ es convergente.*

Falta 1 hoja

II) *Si* $r > 1$ *entonces* $\sum a_n$ *es divergente.*

Observar que si $lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, el criterio anterior no desvela el carácter de la serie. En este caso, puede ser útil el criterio de Raabe:

Proposición 18 *Sea* $\sum a_n$ *una serie de términos positivos. Si* $r = lim_{n\to\infty} n(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n})$ *entonces:*

I) *Si* $r > 1$ *entonces* $\sum a_n$ *es convergente.*

II) *Si* $r < 1$ *entonces* $\sum a_n$ *es divergente.*

El último criterio de series términos positivos presentado es el criterio de la raíz:

Proposición 19 *Sea* $\sum a_n$ *una serie de términos. Si* $r = lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ *entonces:*

I) *Si* $r < 1$ *entonces* $\sum a_n$ *es convergente.*

II) *Si* $r > 1$ *entonces* $\sum a_n$ *es divergente.*

Series de términos no necesariamente positivos

Existen algunos criterios que analizan la convergencia de series de términos no necesariamente positivos. Nosotros nos restringiremos al estudio de series alternadas y a la convergencia absoluta.

Para el estudio de la convergencia de series de términos cualesquiera, introducimos la convergencia absoluta.

Definición 11 *Diremos que serie* $\sum a_n$ *es absolutamente convergente si* $\sum |a_n|$ *es convergente.*

Entonces se obtiene:

Proposición 20 *Toda serie absolutamente convergente es convergente.*

Series alternadas

Una serie alternada es aquella cuyos términos pares son positivos y los impares negativos o recíprocamente.

Un resultado sobre el carácter de las series alternadas es el criterio de Leibnitz:

Teorema 1 *Si la sucesión* a_n *es monótona decreciente y* $lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *entonces* $\sum(-1)^n a_n$ *es convergente.*

Bibliografía

1. T. Apostol, *Calculus Vol. 1*. Ed. Reverte.

2. G. Bradley, K. Smith, *Cálculo de una variable.* Ed. Prentice Hall.

3. J. Burgos, *Cálculo infinitesimal de una variable.* Ed. McGraw-Hill.

4. J. S. Canovas, J. A. Murillo, *Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería.* Ed. Diego Marín.

5. A. de la Villa, A. García, *Cálculo I: Teoría y problemas de análisis matemático de una variable.* CLAGSA.

6. J. Fernández, M. Sánchez, *Ejercicios y complementos de análisis matemático I.* Ed. Tecnos.

7. M. Franco, F. Martínez, R. Molina, *Cálculo I.* Ed. Diego Marín.

8. G. Thomas, R. Finney, *Cálculo de una variable.* Ed. Addison Wesley.