LA INTEGRAL DE RIEMANN

En este tema se introduce el Cálculo Integral que además de permitir calcular longitudes, áreas y volúmenes, tiene multiples aplicaciones en la Ciencia, Ingeniería, etc...

En primer lugar, consideramos una función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq 0 \ \forall x \in [a, b]$ y pretendemos calcular el área delimitada por la gráfica de f, las rectas $x = a$, $x = b$ y el eje OX.

En primer lugar, introducimos el concepto de partición de un intervalo.

Definición. *Dado un intervalo $[a, b]$, una partición de $[a, b]$ es un conjunto finito $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ tal que $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$.*

A los intervalos $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots n-1$ se les llama intervalos de la partición $\mathcal{P}$.

Se define diametro de la partición $\mathcal{P}$ a $\delta(\mathcal{P}) = \max\{|x_{i+1} - x_i|, i = 0, 1, \ldots, n-1\}$.

Dadas dos particiones $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ de $[a, b]$, diremos que $\mathcal{P}'$ es más fina que $\mathcal{P}$ si $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}'$.

Claramente en ese caso $\delta(\mathcal{P}') \leq \delta(\mathcal{P})$.

Introducimos la suma superior y la suma inferior de Riemann de una función asociada a un partición.

Definición. *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$. Se define la suma inferior de Riemann de f para la partición $\mathcal{P}$ como:*

$$\mathrm{s}(\mathcal{P}, f, [a, b]) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i (x_{i+1} - x_i)$$

donde $m_i = \inf\{f(x) \mid x \in [x_i, x_{i+1}]\}$, $0 \leq i \leq n-1$ *y la suma superior de Riemann de* f *como:*

$$\mathrm{S}(\mathcal{P}, f, [a,b]) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i)$$

donde $M_i = \sup\{f(x) \mid x \in [x_i, x_{i+1}]\}$, $0 \leq i \leq n-1$.

Claramente, si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}'$ son particiones de $[a,b]$ tales que $\mathcal{P}'$ es más fina que $\mathcal{P}$ entonces:

$$\mathrm{s}(\mathcal{P}, f, [a,b]) \leq \mathrm{s}(\mathcal{P}', f, [a,b])$$

y

$$\mathrm{S}(\mathcal{P}', f, [a,b]) \leq \mathrm{S}(\mathcal{P}, f, [a,b]).$$

Definición. *Sea* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *y* $(\mathcal{P}_n)_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de particiones de* $[a,b]$ *tales que* $\mathcal{P}_{n+1}$ *es más fina que* $\mathcal{P}_n$, $n = 1, 2, \ldots, \infty$ *y* $\lim_{n\to\infty}\delta(\mathcal{P}_n) = 0$. *Se dice que* f *es integrable Riemann o integrable en* $[a,b]$ *si existen y coinciden los límites* $\lim_{n\to\infty} \mathrm{s}(\mathcal{P}_n, f, [a,b]) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{S}(\mathcal{P}_n, f, [a,b])$. *A este valor se le llama integral de Riemann o integral de* f *en* $[a,b]$ *y se denota* $\int_a^b f(x)dx$. *A* a *y a* b *se les llaman límites de integración. Diremos que* $\int_a^a f(x)dx = 0$.

Notar que si f es integrable en $[a,b]$ y $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$, al aumentar n consideramos cada vez particiones más finas luego las sumas inferiores de Riemann se aproximan cada vez más por defecto al área comprendida entre la gráfica $f(x)$, el eje OX, la recta $x = a$ y la recta $x = b$ y con las sumas superiores nos aproximamos por exceso.

Así, si $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$ y f es integrable Riemann, $\int_a^b f(x)dx$ coincide con el área determinada por la gráfica de $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = a$ y $x = b$.

Se obtienen los siguientes resultados:

Teorema. *Si* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *es continua entonces* f *es integrable en* $[a,b]$.

Teorema. *Si* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *es una función acotada y tiene como máximo un número finito de puntos de discontinuidad entonces* f *es integrable en* $[a,b]$.

Propiedades elementales de la integral de Riemann

Proposición. *Sea* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *integrable y* $c \in [a, b]$*. Entonces* $f(x)$ *es integrable Riemann en* $[a, c]$ *y* $[c, b]$ *y* $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$*.*

Proposición. *Sean* $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *integrables y* $\alpha \in \mathbb{R}$*. Entonces:*

i) $f + g$ *es integrable en* $[a, b]$ *y*

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

ii) αf *es integrable en* $[a, b]$ *y*

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx.$$

iii) *Si* $f(x) \geq 0$ *para todo* $x \in [a, b]$ *entonces:*

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

iv) *Si* $f(x) \geq g(x)$ *para todo* $x \in [a, b]$ *entonces:*

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

v) $|f|$ *es integrable en* $[a, b]$ *y*

$$\int_a^b |f(x)|dx \geq |\int_a^b f(x)dx|.$$

Teorema Fundamental del Cálculo integral. *Sea* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función integrable. Entonces definimos* $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $F(x) = \int_a^x f(t)dt$*. Si* f *es continua en* $x_0 \in [a,b]$ *entonces* F *es derivable en* x_0 *y* $F'(x_0) = f(x_0)$*.*

Introducimos el concepto de primitiva de una función, el cual nos va a permitir calcular el valor de algunas integrales.

Definición. *Si* $f, F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$*, diremos que* $F(x)$ *es un primitiva de* $f(x)$ *si* $F'(x) = f(x)$*. Denotaremos por* $\int f(x)dx$ *el conjunto de todas las primitivas de* $f(x)$*.*

Del Teorema fundamental del Cálculo se obtiene que toda función continua tiene primitivas:

Teorema. *Si* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua entonces* f *posee primitivas y si además* $F, G : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *son primitivas de* f*, existe* $C \in \mathbb{R}$ *tal que* $F(x) = G(x) + C$ *para todo* $x \in [a,b]$*.*

Teorema. (Regla de Barrow). *Si* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *es continua y* $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *es una primitiva de* f *entonces* $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$*.*

Para el cálculo de primitivas son importantes el Teorema del cambio de variable

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)\ dt$$

y la fórmula de integración por partes

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx.$$

Damos una tabla con primitivas de las funciones elementales más importantes.

1. $\int dx = x + C$

2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ si $n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

3. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$.

4. $\int t^n \, dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C$ si $n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

5. $\int \frac{1}{t} \, dt = \ln|t| + C$.

6. $\int \mathrm{e}^t \, dt = e^t + C$.

7. $\int a^t \, dt = \frac{a^t}{\ln a} + C$.

8. $\int \cos t \, dt = \sin t + C$.

9. $\int \sin t \, dt = -\cos t dt$.

10. $\int \frac{1}{\cos^2 t} \, dt = \int \sec^2 t \, dt = \int (1 + \tan^2 t) \, dt = \tan t + C$.

11. $\int \frac{1}{\sin^2 t} \, dt = \int \mathrm{cosec}^2 t \, dt = -\cot t + C$.

12. $\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \, dt = \arcsin t + C$.

13. $\int \frac{1}{1+t^2} \, dt = \arctan t + C$.

14. $\int \cosh t \, dt = \sinh t + C$.

15. $\int \sinh t \, dt = \cosh t dt$.

16. $\int \frac{1}{\cosh^2 t} \, dt = \tanh t + C$.

17. $\int \frac{1}{\sinh^2 t} \, dt = \coth t + C$.

18. $\int \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \, dt = \mathrm{arcsinh} t + C$.

19. $\int \frac{1}{\sqrt{t^2-1}} \, dt = \mathrm{arccosh} t + C$.

Aplicaciones del Cálculo Integral al cálculo de longitudes, áreas y volúmenes

1. Cálculo de la longitud de una curva

Consideremos la curva definida por la función derivable $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Entonces la longitud de dicha curva es

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

2. Cálculo del área de una superficie plana

Recordemos que por definición de la integral de Riemann, $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$ es integrable entonces el área delimitada por la gráfica de $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = a$ y $x = b$ es $\int_a^b f(x)dx$. Como consecuencia de esto, si $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$

integrables con $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$ entonces el área delimitada por las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$, la recta $x = a$ y la recta $x = b$ es

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

3. Cálculo del área de un sólido de revolución

Consideremos el sólido tridimensional que se obtiene al girar la región limitada por la gráfica de la función $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable y el eje OX sobre el eje OX. Entonces el área de la superficie exterior de dicho sólido es

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}dx.$$

4. Cálculo del volumen de un sólido de revolución

Consideremos el sólido tridimensional que se obtiene al girar la región limitada por la gráfica de la función $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable y el eje OX sobre el eje OX. Entonces el volumen de dicho sólido es

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$