# FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL

**Definición.** *Se define función real de variable real a una aplicación* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *donde* $D \subseteq \mathbb{R}$*.*

**Ejemplo.** Si consideramos $f(x) = \sqrt{x}$ entonces el dominio máximo de $f$ es $D = [0, \infty[$.

**Definición.** *Si* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$*, se define la gráfica de* $f$ *como el subconjunto de* $\mathbb{R}^2$

$$\mathrm{Graf}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in D\}.$$

**Definición.** *Si* $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *y* $\alpha \in \mathbb{R}$ *se define:*

**i)** $f + g : D \longrightarrow \mathbb{R} \mid (f+g)(x) = f(x) + g(x)$.

**ii)** $\alpha f : D \longrightarrow \mathbb{R} \mid (\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x)$.

**iii)** $f \cdot g : D \longrightarrow \mathbb{R} \mid (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.

**iv)** Si $g(x) \neq 0$ para todo $x \in D$, $f/g : D \longrightarrow \mathbb{R} \mid (f/g)(x) = f(x)/g(x)$.

**Definición.** *Sea* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$*. Entonces:*

**i)** *Diremos que* $f$ *está acotada superiormente si existe* $k \in \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) \leq k$ $\forall x \in D$*. Entonces diremos que* $k$ *es una cota superior de* $f$*.*

**ii)** *Diremos que* $f$ *está acotada inferiormente si existe* $m \in \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) \geq m$ $\forall x \in D$*. Entonces diremos que* $m$ *es una cota inferior de* $f$*.*

**iii)** *Diremos que* $f$ *está acotada si está acotada superiormente e inferiormente.*

**Definición.** *Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Entonces:*

**i)** *Diremos que $f$ es creciente si $f(x) \leq f(y)$ cuando $x < y$.*

**ii)** *Diremos que $f$ es decreciente si $f(x) \geq f(y)$ cuando $x < y$.*

**iii)** *Diremos que $f$ es estrictamente creciente si $f(x) < f(y)$ cuando $x < y$.*

**iv)** *Diremos que $f$ es estrictamente decreciente si $f(x) > f(y)$ cuando $x < y$.*

**v)** *Diremos que $f$ es monótona si es creciente o decreciente.*

**Ejemplos. 1.** Si $f : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R} \ \mid f(x) = x^2$ entonces $f$ es estrictamente creciente y no está acotada superiormente pero si inferiormente por 0.

**2.** $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ \mid f(x) = -2x + 1$ es estrictamente decreciente y no está ni acotada superiormente ni inferiormente.

**3.** $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ \mid f(x) = -2$ es creciente y decreciente. Además está acotada.

**Definición.** *Si $D \subseteq \mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathbb{R}$, diremos que $x_0$ es un punto de acumulación de $D$ si $\forall \delta > 0$ $(]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus\{x_0\}) \cap D \neq \emptyset$. Denotaremos por $D'$ el conjunto formado por los puntos de acumulación de $D$.* Intuitivamente, $x_0 \in D'$ si podemos encontrar puntos de $D \setminus \{x_0\}$ tan próximos a $x_0$ como queramos.

**Ejemplo.** Si $D = ]-3, 5[\cup\{6\}$ entonces $D' = [-3, 5]$.

**Definición.** *Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D'$ y $l \in \mathbb{R}$.*

**i)** *Diremos que $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ si $\forall \epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in D$, $0 < |x-x_0| < \delta$ entonces $|f(x) - l| < \epsilon$.*

**ii)** *Diremos que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ si $\forall M \in \mathbb{R}$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in D$, $0 < |x - x_0| < \delta$ entonces $f(x) > M$.*

**iii)** *Diremos que $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ si $\forall M \in \mathbb{R}$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in D$, $0 < |x - x_0| < \delta$ entonces $f(x) < M$.* **iv)** *Si $D$ no está acotado superiormente, diremos que $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$ si $\forall \epsilon > 0$ existe $k \in \mathbb{R}$ tal que si $x \in D$, $x > k$ entonces $|f(x)-l| < \epsilon$.*

**v)** *Si $D$ no está acotado superiormente, diremos que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ si $\forall M \in \mathbb{R}$ existe $k \in \mathbb{R}$ tal que si $x \in D$, $x > k$ entonces $f(x) > M$.*

**vi)** *Si $D$ no está acotado superiormente, diremos que* $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ *si* $\forall M \in \mathbb{R}$ *existe* $k \in \mathbb{R}$ *tal que si* $x \in D$, $x > k$ *entonces* $f(x) < M$.

**vii)** *Si $D$ no está acotado inferiormente, diremos que* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$ *si* $\forall \epsilon > 0$ *existe* $k \in \mathbb{R}$ *tal que si* $x \in D$, $x < k$ *entonces* $|f(x) - l| < \epsilon$.

**viii)** *Si $D$ no está acotado inferiormente, diremos que* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ *si* $\forall M \in \mathbb{R}$ *existe* $k \in \mathbb{R}$ *tal que si* $x \in D$, $x < k$ *entonces* $f(x) > M$.

**ix)** *Si $D$ no está acotado inferiormente, diremos que* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ *si* $\forall M \in \mathbb{R}$ *existe* $k \in \mathbb{R}$ *tal que si* $x \in D$, $x < k$ *entonces* $f(x) < M$.

**Proposición.** *Sean* $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D'$ *y* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Supongamos que* $\lim_{x\to x_0} f(x), \lim_{x\to x_0} g(x) \in \mathbb{R}$. *Entonces:*

**i)** $\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$.

**ii)** $\lim_{x\to x_0} \alpha f(x) = \alpha \lim_{x\to x_0} f(x)$.

**iii)** $\lim_{x\to x_0} (f \cdot g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$.

**iv)** *Si* $g(x) \neq 0$ *para todo* $x \in D$ *y* $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$ *entonces* $\lim_{x\to x_0} (f(x)/g(x)) = (\lim_{x\to x_0} f(x))/(\lim_{x\to x_0} g(x))$.

*Si $D$ no está acotado superiormente o $D$ no está acotado inferiormente, se tienen las propiedades anteriores sustituyendo* $\lim_{x\to x_0}$ *por* $\lim_{x\to\infty}$ *o* $\lim_{x\to-\infty}$ *respectivamente.*

**Proposición.** *Sean* $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *y* $x_= \in D'$. *Supongamos que* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ *y* $\lim_{x\to x_0} g(x) = 1$ *y existe* $\lim_{x\to x_0} f(x)(g(x) - 1) \in \mathbb{R}$. *Entonces*

$$\lim_{x\to x_0} g(x)^{f(x)} = \mathrm{e}^{\lim_{x\to x_0} f(x)(g(x)-1)}.$$

*Si $D$ no está acotado superiormente o $D$ no está acotado inferiormente, se tiene que la propiedad es también cierta sustituyendo* $\lim_{x\to x_0}$ *por* $\lim_{x\to\infty}$ *o* $\lim_{x\to-\infty}$ *respectivamente.*

**Límites laterales**

**Definición.** *Sea* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$.

**i)** *Si* $x_0 \in (]-\infty, x_0[\cap D)'$. *Se dice que que el límite cuando* $x$ *tiende a* $x_0$ *por la izquierda de* $f$ *es* $l$ *y se escribe* $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = l$ *si* $\forall \epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que si* $x \in D$, $0 < x_0 - x < \delta$ *entonces* $|f(x) - l| < \epsilon$.

**ii)** *Si* $x_0 \in (]x_0, +\infty[\cap D)'$. *Se dice que que el límite cuando* $x$ *tiende a* $x_0$ *por la derecha de* $f$ *es* $l$ *y se escribe* $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = l$ *si* $\forall \epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que si* $x \in D$, $0 < x - x_0 < \delta$ *entonces* $|f(x) - l| < \epsilon$.

**Proposición.** *Sea* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *y sea* $x_0 \in (]-\infty, x_0[\cap D)' \cap (, x_0, +\infty[\cap D)'$. *Entonces* $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ *si y sólo si* $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = l$.

**Continuidad de funciones**

**Definición.** *Sea* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *y* $x_0 \in D$.

**i)** *Si* $x_0 \notin D'$, *diremos que* $f$ *es continua en* $x_0$.

**ii)** *Si* $x_0 \in D'$, *diremos que* $f$ *es continua en* $x_0$ *si* $\lim_{x\to x_0} f(x) \in \mathbb{R}$ *y* $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. *Diremos que* $f$ *es continua en* $D$ *si es continua en* $x$, *para todo* $x \in D$.

**Proposición.** *Sean* $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ *y* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Supongamos que* $f$ *y* $g$ *son continuas en* $x_0$. *Entonces:*

**i)** $f + g$, $f - g$, $\alpha f$ *y* $f \cdot g$ *son continuas en* $x_0$.

**ii)** *Si* $g(x_0) \neq 0$ *entonces* $f/g$ *es continua en* $x_0$.

**Proposición.** *Si* $f : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ *y* $g : D_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $\mathrm{Im} f \subseteq D_2$, $f$ *es continua en* $x_0 \in D_1$ *y* $g$ *es continua en* $f(x_0)$ *entonces* $g \circ f$ *es continua en* $x_0$.

**Proposición. i)** *Si* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = c \in \mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ *entonces* $f$ *es continua en* $\mathbb{R}$.

**ii)** *Si* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ *entonces* $f$ *es continua en* $\mathbb{R}$.

**iii)** *Si* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ *entonces* $f$ *es continua en* $\mathbb{R}$.

**iv)** *Si* $f(x) = p(x)/q(x)$ *con* $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$ *entonces* $f$ *es continua en* $\mathbb{R} \setminus \{c \in \mathbb{R} \mid q(c) = 0\}$.

**v)** *Si* $f(x) = \sqrt[n]{p(x)}$ *con* $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ *entonces* $f$ *es continua en su dominio.*

**vi)** $f(x) = \mathrm{sen}x$, $g(x) = \mathrm{cos}x$, $h(x) = \mathrm{e}^x$ *y* $r(x) = a^x, a > 0$ *son funciones continuas en* $\mathbb{R}$.

**vii)** $f(x) = \mathrm{tg}(x)$ *es continua en* $\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid \mathrm{cos}x = 0\} = \mathbb{R} \setminus \{n\pi/2 \mid n \in \mathbb{Z}, n \text{ impar}\}$.

**viii)** $g(x) = \mathrm{log}x$, $h(x) = \mathrm{log}_a x$ *son continuas en* $]0, \infty[$.

**ix)** $j(x) = \mathrm{arcsen}x$, $k(x) = \mathrm{arccos}x$ *son continuas en* $[-1, 1]$.

**x)** $l(x) = \mathrm{arctg}x$ *(tomar* $\mathrm{Im}f = ]-\pi/2, \pi/2[$*) es continua en* $\mathbb{R}$.

**Clasificación de las discontinuidades**

Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in D$. Supongamos que $f$ no es continua en $x_0$.

**1.** Si existe $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ diremos que $f$ presenta una discontinuidad evitable en $x_0$.

Si definimos $f : \tilde{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\tilde{f} = f(x)$ si $x \neq x_0$ y $f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x)$, entonces $\tilde{f}(x) = f(x)$ si $x \neq x_0$ y $\tilde{f}$ es continua en $x_0$.

**2.** Si no existe $\lim_{x\to x_0} f(x)$ pero existen $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ y $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ entonces diremos que $f$ presenta una disconitunuidad inevitable de primera especie o de salto finito en $x_0$.

**3.** Si no existe algún límite lateral o alguno es infinito entonces diremos que $f$ presenta en $x_0$ una discontinuidad inevitable de segunda especie.

**Teoremas sobre valores intermedios y valores extremos de las funciones continuas**

En primer lugar se tiene:

**Teorema. (Bolzano)** *Sea* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua tal que* $f(a)f(b) < 0$. *Entonces existe* $c \in [a, b]$ *tal que* $f(c) = 0$.

De este resultado se sigue:

**Teorema. (Weierstrass de los valores intermedios)** *Sea* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua. Si* $y \in \mathbb{R}$ *es un valor entre* $f(a)$ *y* $f(b)$ *entonces existe* $c \in ]a, b[$ *tal que* $f(c) = y$.

Con respecto a los valores extremos se obtiene:

**Teorema. (Weierstrass de los valores extremos)** *Sea* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua. Entonces:*

**i)** $f$ *está acotada.*

**ii)** *Existen* $x_1, x_2 \in [a, b]$ *tales que* $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ *para todo* $x \in [a, b]$.

La función $f : ]0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{1}{x}$ muestra la necesidad de que la función del resultado anterior tenga que ser continua en un intervalo cerrado.

**Definición de derivada y primeras propiedades**

**Definición.** *Sea* $f : ]a, b[ \longrightarrow \mathbb{R}$ *y* $x_0 \in ]a, b[$. *Se dice que* $f$ *es derivable en* $x_0$ *si existe* $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ *y es finito. En ese caso denotaremos por* $f'(x_0)$ *el límite anterior.*

*Se dice que* $f$ *es derivable por la izquierda en* $x_0$ *si existe* $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ *y es finito. En ese caso denotaremos por* $f'_-(x_0)$ *el límite anterior.*

*Se dice que* $f$ *es derivable por la derecha en* $x_0$ *si existe* $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ *y es finito. En ese caso denotaremos por* $f'_+(x_0)$ *el límite anterior.*

*Así,* $f$ *es derivable en* $x_0$ *si y sólo si es derivable por la derecha y por la izquierda en* $x_0$ *y* $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

**Proposición.** *Sea* $f : ]a, b[ \longrightarrow \mathbb{R}$ *y* $x_0 \in ]a, b[$. *Si* $f$ *es derivable en* $x_0$ *entonces* $f$ *es continua en* $x_0$.

El recíproco de la proposición anterior no es cierto en general. Para ello, basta considerar $f : ] -1, 1[ \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ que es continua pero no derivable en $x = 0$.

**Interpretación geométrica de la derivada**

Si $f : ]a,b[ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in ]a,b[$ y $f$ es derivable en $x_0$ entonces la derivada de $f$ en $x_0$ coincide con la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f(x) en $(x_0, f(x_0))$.

Así, la recta tangente a $f(x)$ en $x = x_0$ tiene por ecuación:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Recordemos finalmente que dos rectas son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente.

**Definición.** *Dado $D \subseteq \mathbb{R}$ y $x_0 \in D$, se dice que $x_0$ es un punto interior a $D$ si existe $h > 0$ tal que $]x_0 - h, x_0 + h[ \subseteq D$. Denotaremos por* $\mathrm{Int}(D)$ *el conjunto de los puntos interiores de $D$.*

Notar que si $D \subseteq \mathbb{R}$ entonces $\mathrm{Int}(D) \subseteq D'$.

Si $D \subseteq \mathbb{R}$ y $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, podemos definir de la misma forma que hemos definido la derivada y las derivadas laterales en intervalos abiertos, la derivada y derivadas laterales en puntos interiores de $D$.

Si $x_0 \in \mathrm{Int}(D)$ entonces existe $h > 0$ tal que $]x_0 - h, x_0 + h[ \subseteq D$. Consideremos $\tilde{f} = f_{]x_0-h,x_0+h[} : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Se dice que $f$ es derivable en $x_0$ si lo es $\tilde{f}$ y en ese caso se define $f'(x_0) = \tilde{f}'(x_0)$.

Diremos que $D$ es abierto si $D = \mathrm{Int}(D)$. Así, si $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, podemos definir la derivada en cualquier punto de $D$. Notar que $\mathbb{R}$ es un conjunto abierto.

Si $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ con $D$ abierto, se dice que $f$ es derivable si lo es en $x$, para todo $x \in D$. En ese caso se define la función derivada de $f$ como $f' : D \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que a cada $x \in D$ le hacemos corresponder $f'(x)$.

**Ejemplos.** **1.** Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = k$ con $k \in \mathbb{R}$ entonces $f$ es derivable y $f'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

**2.** Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = x$ entonces $f$ es derivable y $f'(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

**Proposición.** *Sean* $f, g : ]a, b[ \longrightarrow \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ *y* $x_0 \in ]a, b[$ *tal que* $f$ *y* $g$ *son derivables en* $x_0$. *Entonces:*

**i)** $f+g$, $f-g$ *y* $\alpha f(x)$ *son derivables en* $x_0$ *y* $(f+g)'(x_0) = f'(x_0)+g'(x_0)$, $(f-g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$ *y* $(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$.

**ii)** $f \cdot g$ *es derivable en* $x_0$ *y* $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.

**iii)** *Si* $g(x_0) \neq 0$ *entonces* $f/g$ *es derivable en* $x_0$ *y* $(f/g)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$.

**Teorema. (Regla de la cadena).** *Sea* $f : ]a, b[ \longrightarrow \mathbb{R}$ *y* $g : ]c, d[ \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $f(]a, b[) \subseteq ]c, d[$ *y sea* $x_0 \in ]a, b[$. *Si* $f$ *es derivable en* $x_0$ *y* $g$ *es derivable* $f(x_0)$ *entonces* $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$.

## Fórmulas de las derivadas de las funciones elementales

| Función | Derivada |
|---|---|
| $y = x^n$ | $y' = nx^{n-1}$ |
| $y = f(x)^n$ | $y' = nf(x)^{n-1}f'(x)$ |
| $y = \mathrm{e}^{f(x)}$ | $y' = \mathrm{e}^{f(x)}f'(x)$ |
| $y = a^{f(x)}$ | $y = a^{f(x)}f'(x)\mathrm{log}a$ |
| $y = \mathrm{log}f(x)$ | $y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$ |
| $y = \mathrm{log}_a f(x)$ | $y' = \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{log}_a\mathrm{e}$ |
| $y = \mathrm{sen}f(x)$ | $y' = f'(x)\mathrm{cos}f(x)$ |
| $y = \mathrm{cos}f(x)$ | $y' = -f'(x)\mathrm{sen}f(x)$ |
| $y = \mathrm{tg}f(x)$ | $y' = \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} = f'(x)(1+\mathrm{tg}^2 f(x))$ |
| $y = \mathrm{senh}f(x)$ | $y' = f'(x)\mathrm{cosh}f(x)$ |
| $y = \mathrm{cosh}f(x)$ | $y' = f'(x)\mathrm{senh}f(x)$ |
| $y = \mathrm{tgh}f(x)$ | $y' = \frac{f'(x)}{\cosh^2 f(x)}$ |
| $y = \mathrm{arcsen}f(x)$ | $y' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$ |
| $y = \mathrm{arccos}f(x)$ | $y' = \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$ |
| $y = \mathrm{arctg}f(x)$ | $y' = \frac{f'(x)}{1+f(x)^2}$ |
| $y = \mathrm{arcsenh}f(x)$ | $y' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1+f(x)^2}}$ |
| $y = \mathrm{arctgh}f(x)$ | $y' = \frac{f'(x)}{1-f(x)^2}$ |

**Representación gráfica de funciones**

**Definición.** *Sea* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *y* $x_0 \in \mathrm{Int}(D)$*.*

**i)** *Se dice que* $x_0$ *es un máximo relativo de* $f$ *si existe* $h > 0$ *tal que* $]x_0 - h, x_0 + h[\subset D$ *y* $f(x) \leq f(x_0)$ *para todo* $x \in ]x_0 - h, x_0 + h[$*.*

**ii)** *Se dice que* $x_0$ *es un mínimo relativo de* $f$ *si existe* $h > 0$ *tal que* $]x_0 - h, x_0 + h[\subset D$ *y* $f(x) \geq f(x_0)$ *para todo* $x \in ]x_0 - h, x_0 + h[$*.*

**iii)** *Diremos que* $x_0$ *es un extremo relativo de* $f$ *si es un máximo relativo o un mínimo relativo de* $f$*.*

**Ejemplo.** Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = |x|$, entonces $x = 0$ es un mínimo relativo de $f$.

**Proposición. (Fermat).** *Sea* $f : ]a, b[ \longrightarrow \mathbb{R}$ *y* $x_0 \in ]a, b[$*. Si* $x_0$ *es un extremo relativo de* $f$ *y* $f$ *es derivable en* $x_0$ *entonces* $f'(x_0) = 0$*.*

**Definición.** *Sea* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *y* $x_0 \in \mathrm{Int}(D)$*. Supongamos que* $f$ *es derivable en* $x_0 \in D$*. Diremos que* $x_0$ *es un punto crítico de* $f$ *si* $f'(x_0) = 0$*.*

Observemos que si $f$ es derivable en $x_0$ y $x_0$ es un extremo relativo de $f$ entonces $x_0$ es un punto crítico de $f$. El recíproco de lo anterior no es cierto en general, como muestra el ejemplo siguiente.

**Ejemplo.** Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = x^3$, $x = 0$ es un punto crítico pero no es un extremo de $f$.

**Teorema.** *Sea* $f : ]a, b[ \longrightarrow \mathbb{R}$ *derivable. Entonces:*

**i)** *f es creciente si y sólo si* $f'(x) \geq 0$ *para todo* $x \in ]a, b[$*.*

**ii)** *f es decreciente si y sólo si* $f'(x) \leq 0$ *para todo* $x \in ]a, b[$*.*

**iii)** *f es constante si y sólo si* $f'(x) = 0$ *para todo* $x \in ]a, b[$*.*

También se obtiene:

**Teorema.** *Sea* $f : ]a, b[ \longrightarrow \mathbb{R}$ *derivable. Entonces:*

**i)** *Si* $f'(x) > 0$ *para todo* $x \in ]a, b[$ *entonces* $f$ *es estrictamente creciente en* $]a, b[$*.*

**ii)** *Si* $f'(x) < 0$ *para todo* $x \in ]a, b[$ *entonces* $f$ *es estrictamente decreciente en* $]a, b[$*.*

Los recíprocos de las propiedades anteriores no son ciertos ya que basta considerar $f, g :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = x^3$ y $g(x) = -x^3$ que son estrictamente creciente y estrictamente decreciente respectivamente y las derivadas de ambas se anulan en $x = 0$.

**Derivadas sucesivas**

**Definición.** *Sea $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ derivable y $x_0 \in ]a, b[$. Si existe la derivada de $f'$ en $x_0$ y es finita entonces diremos que $f$ es dos veces derivable en $x_0$ y se define $f''(x_0) = (f')'(x_0)$. De la misma forma definimos la derivada tercera, cuarta, etc... Denotaremos por $f^{(n)}(x_0)$ la derivada $n$-ésima de $f$ en $x_0$. Si $f'$ es derivable entonces diremos que $f$ es dos veces derivable y en ese caso definimos $f'' : D \longrightarrow \mathbb{R}$ como $f'' = (f')'$. Así sucesivamente se define la función derivada tercera, cuarta, etc...*

**Proposición.** *Sea $f, g :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ y $x_0 \in ]a, b[$. Si $f$ y $g$ son $n$ veces derivables en $x_0$ entonces:*

**i)** *$f + g$ es $n$ veces derivable en $x_0$ y $(f + g)^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) + g^{(n)}(x_0)$.*

**ii)** *$f \cdot g$ es $n$ veces derivable en $x_0$ y $(f \cdot g)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0) g^{(n-k)}(x_0)$.* **(Fórmula de Leibnitz)**

**Teorema.** *Sea $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ dos veces derivable y supongamos que $x_0 \in ]a, b[$ tal que $f'(x_0) = 0$. Entonces:*

**i)** *Si $f''(x_0) > 0$, entonces $x_0$ es un mínimo relativo de $f$.*

**ii)** *Si $f''(x_0) < 0$, entonces $x_0$ es un máximo relativo de $f$.*

**Concavidad y Convexidad**

Si $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$, se dice que $f$ es convexa si para todo $x, y \in ]a, b[$, el segmento que une los puntos de la gráfica $(x, f(x))$ e $(y, f(y))$ está por encima de la gráfica de $f$ y convexa si está por debajo.

Notemos que el segmento que une los puntos anteriores es el conjunto $\{(1-t)(x_0, y_0) + t(x_1, y_1) \mid 0 \leq t \leq 1\}$.

Así:

**Definición.** *Sea* $f : ]a,b[ \longrightarrow \mathbb{R}$. *(*$]a,b[$ *puede ser* $\mathbb{R}$, $]-\infty,b[$ *o* $]a,\infty[$*).*

**i)** *Diremos que* $f$ *es convexa si para todo* $x,y \in ]a,b[$ *tales que* $x < y$ *entonces* $f((1-t)x+ty) \leq (1-t)f(x)+tf(y)$ *para todo* $t \in ]0,1[$.

**ii)** *Diremos que* $f$ *es cóncava si para todo* $x,y \in ]a,b[$ *tales que* $x < y$ *entonces* $f((1-t)x+ty) \geq (1-t)f(x)+tf(y)$ *para todo* $t \in ]0,1[$.

**Teorema.** *Sea* $f : ]a,b[ \longrightarrow \mathbb{R}$ *dos veces derivable. Entonces:*

**i)** $f$ *es convexa si y sólo si* $f''(x) \geq 0$ *para todo* $x \in ]a,b[$.

**ii)** $f$ *es cóncava en* $]a,b[$ *si y sólo si* $f''(x) \leq 0$ *para todo* $x \in ]a,b[$.

**Definición.** *Sea* $f : ]a,b[ \longrightarrow \mathbb{R}$ *derivable en* $x_0 \in ]a,b[$. *Se dice que* $f$ *tiene un punto de inflexión en* $x_0$ *si la recta tangente a* $f$ *en* $(x_0, f(x_0))$ *cruza la gráfica de* $f$ *en* $(x_0, f(x_0))$, *o sea, si existe* $\delta > 0$ *tal que la función* $g(x) = f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0))$ *tiene distinto signo en* $]x_0-\delta, x_0[$ *que en* $]x_0, x_0+\delta[$. *Esto es equivalente a que* $f$ *es dos veces derivable en* $x_0$ *y en* $x_0$, *la función pasa de ser convexa a cóncava o de ser cóncava a convexa.*

**Proposición.** *Sea* $f : ]a,b[ \longrightarrow \mathbb{R}$ *dos veces derivable en* $]a,b[$. *Supongamos que* $f''$ *es continua en* $x_0 \in ]a,b[$. *Si* $f$ *tiene un punto de inflexión en* $x_0$ *entonces* $f''(x_0) = 0$.

**Teoremas sobre valores medios de funciones derivables**

En primer lugar se tiene:

**Teorema. (Rolle)** *Sea* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua y derivable en* $]a,b[$. *Si* $f(a) = f(b)$ *entonces existe* $c \in ]a,b[$ *tal que* $f'(c) = 0$.

Las hipt́esis de continuidad y derivabilidad en el resultado anterior son necesarias.

Del resultado anterior se sigue:

**Teorema. (del valor medio de Cauchy)** *Sean* $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continuas y derivables en* $]a,b[$. *Entonces existe* $c \in ]a,b[$ *tal que*

$$f'(c)(g(b)-g(a)) = g'(c)(f(b)-f(a)).$$

**Nota.** Si además de las hipótesis del resultado anterior se tiene que $g(b) \neq g(a)$ y $g'$ y $f'$ no se anulan simultaneamente entonces $g'(c) \neq 0$ y entonces la expresión de la tesis del resultado anterior se puede expresar como:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Una consecuencia de este teorema es el siguiente resultado:

**Teorema. (del valor medio de Lagrange)** *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y derivable en $]a, b[$. Entonces existe $c \in ]a, b[$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

**Reglas de Bernoulli-L'Hôpital**

**Teorema. (Bernoulli-L'Hôpital)** *Sean $f, g : ]a - h, a[ \cup ]a, a + h[ \longrightarrow \mathbb{R}$ derivables en $]a - h, a[ \cup ]a, a + h[$. Supongamos que $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$ $(\infty)$ y que $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in ]a - h, a[ \cup ]a, a + h[$. Si existe $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c \in \mathbb{R}$ $(+\infty, -\infty)$, entonces existe $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = c \in \mathbb{R}$ $(+\infty, -\infty)$.*

Esta resultado permite también resolver las indeterminaciones $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $1^{\infty}$, $\infty^0$, $0^{\infty}$, $0^0$ y $\infty - \infty$.

**Aproximación polinómica de funciones derivables. Fórmula de Taylor**

Supongamos que $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in D$ y $f$ es $n$ veces derivable en $a$. Entonces nos planteamos las siguientes preguntas:

**1.** ¿Existe un polinomio $p(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ tal que $p^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$, $1 \leq k \leq n$?

**2.** ¿Permite el polinomio anterior obtener buenas aproximaciones de los valores de $f$ evaluados en puntos próximos a $a$? ¿Se controla el error cometido con tales aproximaciones?

Observemos que la importancia de obtener tal polinomio es que, en general, los polinomios son el tipo de funciones más sencillas de evaluar.

El Teorema de Taylor afirma la existencia, bajo ciertas condiciones, de un polinomio que satisface todo lo anterior.

**Teorema. (Taylor)** *Sea $h > 0$, $a \in \mathbb{R}$ y $f : ]a-h, a+h[ \longrightarrow \mathbb{R}$ una función $(n+1)$-veces derivable. Entonces para todo $x \in ]a-h, a+h[$ existe un valor $\xi$ entre $a$ y $x$ tal que:*

$$f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Se define el polinomio de Taylor de grado $n$ de $f$ en $a$ como:

$$p(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Este polinomio es el único que cumple las propiedades que nos planteabamos. La expresión:

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

donde $\xi$ es un valor entre $a$ y $x$, conocida como expresión del error de Lagrange, nos da el error cometido en cada aproximación. Como normalmente el valor de $\xi$ va a ser desconocido, esta expresión sólo nos dará una cota superior de dicho error.

Si $a = 0$, al polinomio obtenido se le llama polinomio de MacLaurin de grado $n$ de $f$ en $a$.