Álgebras de Boole

Juan Medina Molina

25 de noviembre de 2003

Introducción

Abordamos en este tema el estudio de las álgebras de Boole. Este tema tiene una aplicación directa a la electrónica digital ya que nos permitirá hacer simplificaciones de circuitos digitales. Para ello presentaremos el método de Quine-McCluskey que permite simplificar expresiones booleanas.

Hemos estructurado este tema en los siguientes apartados:

- Definición, ejemplos y primeras propiedades.
- Relación binaria de orden asociada a un álgebra de Boole. Átomos. Expresión de los elementos de un álgebra de Boole finita como suma de átomos.
- Álgebra de Boole de las funciones booleanas. Átomos de ésta.
- Formas de representar una función de Boole: expresión boolena, tabla de verdad y diagrama lógico.
- Simplificación de funciones boolenas. Método de Quine-McCluskey.

Definición y primeras propiedades

Definición 1 *Sea K un conjunto no vacío y $+, \cdot$ dos leyes de composición interna de K. Decimos que $(K, +, \cdot)$ es un álgebra de Boole si:*

i) $+$ *y* $\cdot$ *son asociativas.*

ii) $+$ *y* $\cdot$ *son conmutativas.*

iii) $+$ *tiene elemento neutro* 0 *y* $\cdot$ *tiene elemento neutro* 1.

iv) $+$ *y* $\cdot$ *son distributivas una con respecto de la otra.*

v) *Para todo* $a \in K$ *existe* $a' \in K$ *tal que* $a+a' = 1$ *y* $a \cdot a' = 0$. *Entonces diremos que* a' *es el complementario de* a. *(Posteriormente demostraremos que el complementario de un elemento es único).*

Notas.

1. Se puede demostrar fácilmente que si $n \in \mathbb{N}$ y $a, b_1, \ldots, b_n \in K$ entonces $a \cdot (b_1 + \ldots + b_n) = (a \cdot b_1) + \ldots + (a \cdot b_n)$ y $a + (b_1 \cdot \ldots \cdot b_n) = (a + b_1) \cdot \ldots \cdot (a + b_n)$.

2. Dado que las operaciones $+$ y $\cdot$ son asociativas, si $a, b, c \in K$ denotaremos por $a+b+c = (a+b)+c = a+(b+c)$ y por $a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Ejemplos. **1.** Si E es un conjunto no vacío, entonces $(\mathbb{P}(E), \cup, \cap)$ es un álgebra de Boole con elementos neutros $\emptyset$ y E respectivamente y si $A \in \mathbb{P}(E)$, entonces $A' = \bar{A}^E$.

2. Álgebra de predicados.

3. En el conjunto $K = \{0, 1\}$ se consideran las leyes de composición interna que vienen dadas por las siguientes tablas:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Entonces $(K, +, \cdot)$ es un álgebra de Boole que tiene la siguiente interpretación:

Supongamos que los valores de entrada $1, 0$ corresponden respectivamente a las posiciones ON y OFF de los interruptores de un circuito mientras que los valores $1, 0$ del interior representan la salida o no de corriente. Entonces $+$ representa un circuito con dos interruptores en paralelo y $\cdot$ representa un circuito con dos interruptores en serie.

4. Si $(K, +, \cdot)$ es un álgebra de Boole y $n \in \mathbb{N}$, definimos en K^n dos operaciones que denotaremos por $+$ y $\cdot$:

Si $(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \in K^n$ se define $(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$ y $(a_1, \ldots, a_n) \cdot (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 \cdot b_1, \ldots, a_n \cdot b_n)$.

Entonces $(K^n, +, \cdot)$ es un álgebra de Boole con elementos neutros $(0, \ldots, 0)$ y $(1, \ldots, 1)$ para $+$ y $\cdot$ respectivamente y si $(a_1, \ldots, a_n) \in K^n$ entonces $(a_1, \ldots, a_n)' = (a_1', \ldots, a_n')$.

Presentamos una serie de propiedades que se satisfacen en un álgebra de Boole. Dado que de la definición de álgebra de Boole, las operaciones $+$ y $\cdot$ satisfacen los mismos axiomas, si una propiedad es cierta, la propiedad que se obtiene de intercambiar los $+$ con los $\cdot$ y los 1 con los 0 es también cierta.

Propiedades.

1. Idempotencia de $+$ y $\cdot$.
Si $a \in K$ entonces $a + a = a$ y $a \cdot a = a$.
Demostración. $a + a = (a + a) \cdot 1 = (a + a) \cdot (a + a') = a + (a \cdot a') = a + 0 = a$.

2. 1 es absorbente para $+$ y 0 es absorbente para $\cdot$.
Si $a \in K$ entonces $a + 1 = 1$ y $a \cdot 0 = 0$.
Demostración. $a + 1 = a + (a + a') = (a + a) + a' = a + a' = 1$.

3. Propiedades simplificativas.
Si $a, b \in K$ entonces $a + (a \cdot b) = a$ y $a \cdot (a + b) = a$.
Demostración. $a + (a \cdot b) = (a \cdot 1) + (a \cdot b) = a \cdot (1 + b) = a \cdot 1 = a$.

4. El complementario es único.
Si $a \in K$ entonces tiene un único complementario.
Demostración. Si $a'' \in K$ es otro complementario de a (además de a') entonces $a'' = a'' + 0 = a'' + (a \cdot a') = (a'' + a) \cdot (a'' + a') = 1 \cdot (a'' + a') = (a + a') \cdot (a'' + a') = (a \cdot a'') + a' = 0 + a' = a'$.

5. Leyes de De Morgan.
Si $a, b \in K$ entonces $(a + b)' = a' \cdot b'$ y $(a \cdot b)' = a' + b'$.
Demostración. Para demostrar la primera de las propiedades, veamos que $a' \cdot b'$ es el complementario de $a + b$.
$(a + b) + (a' \cdot b') = (a + b + a') \cdot (a + b + b') = 1 \cdot 1 = 1$.
$(a + b) \cdot (a' \cdot b') = (a \cdot a' \cdot b') + (b \cdot a' \cdot b') = 0 \cdot 0 = 0$.

6. *Si $a \in K$ entonces $(a')' = a$.*
Demostración. Dado que a' es complementario de a, a es complementario de a' luego $a = (a')'$.

7. *$0' = 1$ y $1' = 0$.*
Demostración. Dado que 0 es absorbente para $\cdot$ se tiene que $1 \cdot 0 = 0$
Dado que 1 es absorbente para $+$ se tiene que $1 + 0 = 1$.

Así $1' = 0$ y $0' = 1$.

8. *Si K es un álgebra de Boole tal que $|K| \geq 2$ entonces:*

i) $0 \neq 1$.

ii) *Si $a \in K$ entonces $a' \neq a$.*

Demostración.

i) Razonamos por reducción al absurdo. Si $0 = 1$ y $a \in K \setminus \{0\}$ entonces $a = a \cdot 1 = a \cdot 0 = 0$ lo cual es una contradicción.

   Así $0 \neq 1$.

ii) Razonamos de nuevo por reducción al absurdo. Si $a' = a$, por i) $a \neq 0$ y entonces $a = a \cdot a = a \cdot a' = 0$, lo que es una contradicción.

   Así $a' \neq a$.

9. Teorema de Quine.

Si $a, b, c \in K$ entonces $ab + ac + bc' = ac + bc'$.

Demostración. Se verifica que $ab + ac + bc' = ab(c + c') + ac + bc' = abc + abc' + ac + bc' = (abc + ac) + (abc' + bc') = ac + bc'$.

Relación binaria de orden asociada a un álgebra de Boole. Átomos

Si $(K, +, \cdot)$ es un álgebra de Boole, definimos la siguiente relación binaria en K:

Si $a, b \in K$, diremos que $a \leq b$ si $a + b = b$.

Observemos que esto es equivalente a que $a \cdot b = a$ ya que si $a + b = b$ entonces $a \cdot b = a \cdot (a + b) = (a \cdot a) + (a \cdot b) = a + (a \cdot b) = a$ y recíprocamente, si $a \cdot b = a$ entonces $a + b = (a \cdot b) + b = (a + b) \cdot (b + b) = (a + b) \cdot b = b$.

Veamos que es una relación binaria de orden:

Claramente es reflexiva ya que si $a \in K$ entonces $a + a = a$ luego $a \leq a$.

Si $a, b \in K$ tales que $a \leq b$ y $b \leq a$ entonces $a + b = b$ y $b + a = a$ luego $a = b + a = a + b = b$ y entonces $\leq$ es simétrica.

Si $a, b, c \in K$ tales que $a \leq b$ y $b \leq c$ entonces $a + b = b$ y $b + c = c$ luego $c = b + c = (a + b) + c = a + (b + c) = a + c$ y así $a \leq c$ luego $\leq$ es transitiva.

Definición 2 *Si $a \in K \setminus \{0\}$, diremos que a es un elemento minimal o átomo de K si no existe $b \in K \setminus \{0\}$, $b \neq a$, tal que $b \leq a$.*

Ejemplo. Si X es un conjunto y $A, B \subseteq X$ entonces:
$A \leq B$ si y sólo si $A \cup B = B$ lo que es equivalente a $A \subseteq B$.
Así, la relación binaria de orden asociada al álgebra de Boole de las partes de un conjunto es la inclusión.

Observemos que entonces los átomos de $(\mathbb{P}(X), +, \cdot)$ son los subconjuntos de X que constan de un solo elemento.

Propiedades.

1. *$0 \leq a \leq 1$ para todo $a \in K$.*
Demostración. Se sigue de ser 1 y 0 elementos absorbentes para $+$ y $\cdot$ respectivamente.

2. Si $a, b \in K$ entonces $a \cdot b \leq a, b \leq a + b$.
Demostración. Se sigue de las propiedades simplificativas.

3. Si $a, b, c \in K$ tales que $a \leq b$ y $a \leq c$ entonces $a \leq b \cdot c$.
Demostración. De $a \leq b$ y $a \leq c$ se obtiene que $a \cdot b = a$ y $a \cdot c = a$ respectivamente. Entonces $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot c = a$ luego $a \leq b \cdot c$.

4. Si $a, b \in K$ son átomos distintos entonces $a \cdot b = 0$.
Demostración. Dado que $a \cdot b \leq a$ y $a \cdot b \neq a$ ya que en otro caso $a \leq b$ lo que contradice que b sea minimal, por minimalidad de a se tiene que $a \cdot b = 0$.

A partir de ahora nos restringiremos a álgebras de Boole finitas.

Proposición 1 *Supongamos que K es finita y $|K| \geq 2$. Si $a \in K \setminus \{0\}$ entonces existe un átomo b de K tal que $b \leq a$.*

Corolario 1 *Si K es finita con $|K| \geq 2$ entonces K posee átomos.*

Teorema 1 *Si K es finita entonces todo elemento distinto de 0 de K se puede expresar como suma de átomos de K y además, esta descomposición es única salvo orden de los sumandos o repetición de éstos.*

Funciones booleanas

Si $(K, +, \cdot)$ es un álgebra de Boole, $n \in \mathbb{N}$ y $f, g : K^n \longrightarrow K$ son aplicaciones definimos:

i) $f + g : K^n \longrightarrow K \mid (f + g)(a) = f(a) + g(a)$.

ii) $f \cdot g : K^n \longrightarrow K \mid (f \cdot g)(a) = f(a) \cdot g(a)$.

iii) $f' : K^n \longrightarrow K \mid f'(a) = f(a)'$.

Definición 3 *Si K es un álgebra de Boole y $n \in \mathbb{N}$, las funciones booleanas de orden n sobre K son:*

I) $0 : K^n \longrightarrow K \mid 0(x_1, \ldots, x_n) = 0$.

$1 : K^n \longrightarrow K \mid 1(x_1, \ldots, x_n) = 1$.

$f_1 : K^n \longrightarrow K \mid f_1(x_1, \ldots, x_n) = x_1$.

$f_2 : K^n \longrightarrow K \mid f_2(x_1, \ldots, x_n) = x_2$.

$\ldots$

$f_n : K^n \longrightarrow K \mid f_n(x_1, \ldots, x_n) = x_n$.

II) Si f, g son funciones booleanas de orden n sobre K entonces $f + g$, $f \cdot g$ y f' también lo son.

Denotaremos por $\mathcal{FB}(n, K)$ el conjunto de todas las funciones booleanas de orden n sobre K.

Por definición, toda función booleana se obtiene de las funciones booleanas de I), tras un número finito de operaciones (incluyendo las negaciones). Definimos la longitud de una función booleana f como el número mínimo de tales operaciones necesarias para la obtención de f y denotaremos dicho número por $\lambda(f)$.

Ejemplos.

1. Supongamos que $(K, +, \cdot)$ es un álgebra de Boole. Entonces:

   $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2')' \cdot (x_1' \cdot x_2')$ es una función booleana de orden 2 sobre K.

   $g(x_1, x_2, x_3) = [x_3' \cdot (x_1' + x_2)] \cdot (x_3 \cdot x_2')$ es una función booleana de orden 3 sobre K.

2. Si $X = \{1, 2, 3\}$, se considera el álgebra de Boole $(\mathbb{P}(X), \cup, \cap)$. Sea $f : \mathbb{P}(X)^3 \longrightarrow \mathbb{P}(X) \mid f(x_1, x_2, x_3) = x_1$.

   Entonces $f(\{1, 2\}, \{2\}, \emptyset) = \{1, 2\}$.

   $g : \mathbb{P}(X)^3 \longrightarrow \mathbb{P}(X) \mid g(x_1, x_2, x_3) = \bar{x_1} \cap (\bar{x_2} \cup x_3)$.

   Entonces $g(\{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3\}) = \overline{\{1, 2\}} \cap (\overline{\{1, 2, 3\}} \cup \{2, 3\}) = \{3\} \cap (\emptyset \cup \{2, 3\}) = \{3\} \cap \{2, 3\} = \{3\}$.

Hasta ahora hemos definido una función booleana $f : K^n \longrightarrow K$ a partir de una expresión que nos da la imagen de un $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K^n$ genérico en función de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Diremos que ésta es una expresión booleana de f.

Proposición 2 *Si K es un álgebra de Boole finita entonces $\mathcal{FB}(n, K)$ con las leyes $+$ y $\cdot$ restringidas es un álgebra de Boole finita.*

Vamos a definir una familia de funciones booleanas de orden n sobre un álgebra de Boole K:

Si $B = \{0, 1\} \subseteq K$, para cada $b = (b_1, \ldots, b_n) \in B^n$ sea

$$\mathbf{r}_b : K^n \longrightarrow K \mid \mathbf{r}_b(x_1, \ldots, x_n) = x_1^* \cdot \ldots \cdot x_n^*$$

donde $x_i^* = x_i$ si $b_i = 1$ y $x_i^* = x_i'$ si $b_i = 0$.

Si $f \in \mathcal{FB}(n, K)$ denotaremos por $\mathbf{S}(f) = \{b \in B^n \mid f(b) = 1\}$.

Teorema 2 *i) Los átomos de $\mathcal{FB}(n, K)$ son $\{\mathbf{r}_b \mid b \in B^n\}$.*

ii) Si $f \in \mathcal{FB}(n, K) \setminus \{0\}$ entonces f se expresa de forma única como suma de átomos del siguiente modo:

$$f = \Sigma_{b \in \mathbf{S}(f)} \mathbf{r}_b.$$

A ésta se le llama forma canónica disyuntiva de f.

Nota. El resultado anterior muestra que una función booleana viene totalmente determinada por las imágenes de los elementos de B^n.

Formas de representar una función de Boole

Hasta ahora hemos expresado una función booleana a partir de expresiones booleanas. También pueden representarse:

1. Por su tabla de verdad. Ésta es una tabla que recoge las imágenes por f de los elementos de B^n que como sabemos, la determinan.

2. Por un diagrama lógico.

Simplificación de funciones booleanas

El proceso de simplificación de una expresión booleana consiste en encontrar una nueva expresión más sencilla que determine la misma función booleana, en el sentido de que tenga un número menor de operaciones.

Para ello introducimos el método de Quine Mc-Cluskey que consta de los siguientes pasos:

Sea K un álgebra de Boole y f una función booleana de orden n sobre K. Denotamos por $B = \{0, 1\}$. Para obtener una expresión simplificada de f realizamos los siguientes pasos:

1. Calculamos su tabla de verdad.

2. Ordenamos los valores cuya imagen es 1 en una columna de arriba a abajo en número decreciente de unos. Separamos éstos en bloques de forma que los elementos de cada bloque tengan el mismo número de unos.

3. Comparamos cada elemento de cada bloque con cada uno de los elementos del bloque inferior de forma que si dos de estos elementos difieren en un único valor, les antepondremos un + y escribiremos en una nueva columna, el elemento que se obtiene al sustituir dicho valor por un guión. Separaremos los elementos resultantes por una línea cuando acabemos de comparar dos bloques.

4. Repetimos el proceso anterior con la nueva columna obtenida y así sucesivamente hasta que sólo tengamos una única columna con un único bloque o bien, cuando de los bloques que se tengan, no existan elementos que difieran sólo en un valor de otro elemento del bloque siguiente.

5. Rellenamos una tabla donde escribimos en la primera fila las secuencias de unos y ceros correspondientes a los átomos de f, en la primera columna las secuencias con guiones que no llevan + obtenidas anteriormente, y en cada recuadro interior correspondiente a un átomo y uno con guión, escribiremos un asterisco si todos los valores de ambos, sin contar los elementos con guiones coinciden.

6. Finalmente, de cada columna elegimos un asterisco de forma que el número de filas donde hayan sido elegidos asteriscos sea el menor posible.

   La suma de los elementos de la primera columna que contienen asteriscos elegidos junto con los elementos de la primera fila en cuya columna no hay ningún asterisco es una expresión booleana simplificada de f.