Espacio vectorial euclídeo

Juan Medina Molina

13 de diciembre de 2004

Introducción

En este tema estudiaremos espacios vectoriales reales a los que hemos añadido una nueva operación, el producto escalar, que a cada pareja de vectores les hace corresponder un número real. De nuevo, en este capítulo introducimos de forma abstracta un concepto que ya ha sido estudiado en la educación secundaria. Finalizaremos el capítulo estudiando algunos tipos de aplicaciones lineales que tienen un significado geométrico y la diagonalización ortogonal.

Hemos dividido este tema en los siguientes apartados:

- Definición y propiedades del producto escalar. Norma y distancia asociadas.
- Ortogonalidad. Bases ortonormales. Método de Gram-Schmidt. Subespacios ortogonales.
- Endomorfismos con significado geométrico: Homotecias, proyecciones, simetrías y rotaciones en el plano.
- Diagonalización ortogonal.

Definición y propiedades del producto escalar. Norma y distancia asociadas.

En este tema, al igual que en el anterior, trabajaremos únicamente con espacios vectoriales reales.

Definición 1 *Si V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, un producto escalar en V es una aplicación*

$$\langle .,. \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

que verifica:

i) $\langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$ *para todo* $x,y,z \in V$.

ii) $\langle \alpha x,y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$, *para todo* $x,y \in V$.

iii) $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$ *para todo* $x,y \in V$.

iv) $\langle x,x\rangle \geq 0$ *para todo* $x \in V$.

v) $\langle x,x\rangle = 0$ *si y sólo si* $x = 0$.

Entonces diremos que $(V,\langle .,.\rangle)$ *es un espacio vectorial euclídeo.*

Nota. Por simetría se tiene que $\langle x,y+z\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle$ y $\langle x,\alpha y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, para todo $x,y \in V$.

Ejemplo.

En $\mathbb{R}^n$ la aplicación $\langle .,.\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\langle (x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\rangle = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$ es un producto escalar conocido como el producto escalar canónico de $\mathbb{R}^n$.

Proposición 1 $\langle x,0\rangle = 0$ *para todo* $x \in V$.

Ortogonalidad. Bases ortonormales. Método de Gram-Schmidt. Subespacios ortogonales

Definición 2 *Si* $(V,\langle .,.\rangle)$ *es un espacio vectorial euclídeo , se define la norma asociada a la aplicación* $\| \, . \, \| : V \longrightarrow \mathbb{R}$ *que que* $\| x \| = +\sqrt{\langle x,x\rangle}$.

Se obtienen las siguientes propiedades de la norma:

Proposición 2 *i)* $\| x \| = 0$ *si y sólo si* $x = 0$.

ii) $\| \alpha x \| = |\alpha| \, \| x \|$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$, *para todo* $x \in V$.

iii) $\| x+y \|^2 + \| x-y \|^2 = 2(\| x \|^2 + \| y \|^2)$.

iv) $|\langle x,y\rangle| \leq \| x \| \| y \|$ *para todo* $x,y \in V$.

v) $\| x+y \| \leq \| x \| + \| y \|$ *para todo* $x,y \in V$.

Definición 3 *Si* $(V,\langle .,.\rangle)$ *es un espacio vectorial euclídeo y* $x,y \in V$, *se define la distancia de* x *a* y *como* $\mathbf{d}(x,y) = \| x-y \|$.

Si además x,y *son no nulos, se define el ángulo entre* x *e* y *como*

$$\theta = \arccos \frac{\langle x,y\rangle}{\| x \| \| y \|}.$$

Así, $\langle x,y\rangle = \| x \| \| y \| \cos\ \theta$.

Definición 4 *Si $(V, \langle ., . \rangle)$ es un espacio vectorial euclídeo y $x, y \in V \setminus \{0\}$, diremos que x e y son ortogonales si $\langle x, y \rangle = 0$.*

Si $U = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq V \setminus \{0\}$ se dice que U es un sistema ortogonal de V si los vectores que lo forman son ortogonales dos a dos.

Entonces se obtiene el teorema de Pitágoras:

Teorema 1 *Si $u, v \in \mathbb{R}^n$ son ortogonales entonces:*

$$\| u + v \|^2 = \| u \|^2 + \| v \|^2 .$$

Razonando por inducción, se obtiene una generalización del resultado anterior para un sistema ortogonal finito de vectores:

Proposición 3 *Si $\{u_1, \ldots, u_r\}$ es un sistema ortogonal entonces*

$$\| u_1 + \ldots + u_r \|^2 = \| u_1 \|^2 + \ldots + \| u_r \|^2 .$$

Pasamos a definir los conceptos de vector unitario y ortogonal:

Definición 5 *Si $(V, \langle ., . \rangle)$ es un espacio vectorial euclídeo :*

i) Dado $v \in V$, diremos que v es un vector unitario si $\| v \| = 1$.

ii) Si $B = \{e_1, \ldots, e_r\}$ es una base de V, diremos que B es una base ortonormal de V si es un sistema ortogonal y todos los vectores que lo componen son unitarios.

Es sencillo demostrar el siguiente resultado:

Proposición 4 *Si $u \in V \setminus \{0\}$ entonces $u / \| u \|$ es un vector unitario.*

A continuación presentamos el método de Gram-Schmidt para la obtención de una base ortonormal a partir de una base de un espacio vectorial.

Método de Gram-Schmidt

Supongamos que $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ es un base de un $\mathbb{R}$-espacio vectorial V que posee un producto escalar $\langle\ .\ ,\ .\ \rangle$. Definimos un conjunto $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ de vectores de V de la siguiente forma:

Definimos $u_1 = (1/\sqrt{\langle e_1, e_1 \rangle})e_1$.

Sea $w_2 = e_2 - \langle e_2, u_1 \rangle u_1$.

Entonces definimos $u_2 = (1/\sqrt{\langle w_2, w_2 \rangle})w_2$.

Sea $w_3 = e_3 - \langle e_3, u_1 \rangle u_1 - \langle e_3, u_2 \rangle u_2$.

Entonces definimos $u_3 = (1/\sqrt{\langle w_3, w_3\rangle})w_3$.
Supongamos que para un cierto $j < n$ tenemos definidos $u_1, u_2 \ldots, u_j$.
Sea $w_{j+1} = e_{j+1} - \langle e_{j+1}, u_1\rangle u_1 - \langle e_{j+1}, u_2\rangle u_2 - \ldots - \langle e_{j+1}, u_j\rangle u_j$.
Entonces definimos $u_{j+1} = (1/\sqrt{\langle w_{j+1}, w_{j+1}\rangle})w_{j+1}$.
Entonces $B' = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ es un base ortonormal de V.

Definición 6 *Si $(V, \langle ., .\rangle)$ es un espacio vectorial euclídeo :*

i) Si $v \in V$ y $S \subseteq V$, se dice que v es ortogonal a S si $\langle v, w\rangle = 0$ para todo $w \in S$. En el caso de que $S \leq V$, es sencillo demostrar que v es ortogonal a S si lo es a una base de S.

ii) Si $S, T \leq V$, se dice que S y T son ortogonales si $\langle v, w\rangle = 0$ para todo $v \in S$ y para todo $w \in T$. Se puede demostrar fácilmente que lo anterior ocurre si y sólo si cualquier base de S es ortogonal a cualquier base de T.

iii) Si $S \leq V$, se define el subespacio ortogonal de S como:

$$S^\perp = \{v \in V \mid \langle v, w\rangle = 0 \; \forall \; w \in S\}.$$

Se obtienen las siguientes propiedades:

Proposición 5 *Sea S un subespacio de V. Entonces:*

i) $S \cap S^\perp = 0$.

ii) $(S^\perp)^\perp = S$.

iii) $V^\perp = 0$ y $0^\perp = V$.

iv) Si V es finitamente generado entonces $V = S \oplus S^\perp$.

Del apartado iv) de la proposición anterior se deduce que si $S \leq \mathbb{R}^n$, entonces cualquier vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se puede expresar como $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ siendo $\mathbf{u} \in S$ y $\mathbf{v} \in S^\perp$. Entonces se define la proyección ortogonal de $\mathbf{x}$ en S como $\mathbf{P}_S(\mathbf{x}) = \mathbf{u}$.
Observemos que entonces $\mathbf{x} - \mathbf{P}_S(\mathbf{x}) = \mathbf{v} \in S^\perp$.

Definición 7 *Si $v \in V$ y $S \leq V$ se define la distancia de v a S como:*

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}, S) = \mathbf{inf}\{\mathbf{d}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mid w \in S\}.$$

Proposición 6 $\mathbf{d}(\mathbf{x}, S) = \mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{P}_S(\mathbf{x}))$.

Endomorfismos con significado geométrico

En primer lugar, definimos las homotecias de razón $\alpha \in \mathbb{R}$ en un espacio vectorial real V finitamente generado:

Definición 8 *Si $(V, \langle ., . \rangle)$ es un espacio vectorial euclídeo , se define la homotecia de razón $\alpha \in \mathbb{R}$ a $f : V \longrightarrow V \mid f(v) = \alpha v$.*

Claramente, para toda base B de V se tiene que $\mathbf{M}_B(f) = \alpha I$.

A continuación definimos las proyecciones:

Definición 9 *Si $(V, \langle ., . \rangle)$ es un espacio vectorial euclídeo , y S y T son subespacios de $\mathbb{R}^n$ tales que $S \oplus T = \mathbb{R}^n$, entonces se define la proyección de base S y dirección T al endomorfismo P de $\mathbb{R}^n$ que verifica que $P(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v} \in S$ y $P(\mathbf{w}) = 0$ para todo $\mathbf{w} \in T$. Claramente, si B es una base de $\mathbb{R}^n$ que resulta de unir una base de S con una de T, entonces*

$$M_B(P) = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0}_{r \times (n-r)} \\ \mathbf{0}_{(n-r) \times r} & \mathbf{0}_{(n-r) \times (n-r)} \end{pmatrix},$$

siendo r la dimensión de S. En el caso particular de que $T = S^{\perp}$, la aplicación anterior recibe el nombre de proyección ortogonal de base S.

La tercera aplicación que presentamos es la simetría:

Definición 10 *Si $(V, \langle ., . \rangle)$ es un espacio vectorial euclídeo y S y T son subespacios suplementarios de $\mathbb{R}^n$, se define la simetría de base S y dirección T como el endomorfismo f de $\mathbb{R}^n$ verificando que $f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v} \in S$ y $f(\mathbf{w}) = -\mathbf{w}$ para todo $\mathbf{w} \in T$. Claramente, si B es una base de $\mathbb{R}^n$ que resulta de unir una base de S con una de T, entonces*

$$M_B(P) = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0}_{r \times (n-r)} \\ \mathbf{0}_{(n-r) \times r} & -\mathbf{I}_{(n-r) \times (n-r)} \end{pmatrix},$$

siendo r la dimensión de S. Si $T = S^{\perp}$, la aplicación lineal anterior recibe el nombre de simetría ortogonal de base S.

Por último, se presentan las rotaciones en el plano:

Definición 11 *Si $\theta \in [0, 2\pi[$, se dice que $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una rotación de ángulo $\theta \in [0, 2\pi[$ si existe una base B tal que*

$$\mathbf{M}_B(f) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Diagonalización ortogonal

Definición 12 *Si* $P \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$*, se dice que* P *es una matriz ortogonal si* $P^{-1} = P^T$.

Definición 13 *Sean* $A, C \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$*. Diremos que* A *y* C *son ortogonalmente semejantes si existe una matriz ortogonal* P *tal que* $C = P^{-1}AP$.

Definición 14 *Se dice que una matriz cuadrada es diagonalizable ortogonalmente si es ortogonalmente semejante a una matriz diagonal.*

Entonces se obtiene:

Proposición 7 *Si* $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ *es simétrica (luego es diagonalizable) y consideramos en* $\mathbb{R}^n$ *el producto escalar canónico, entonces los subespacios propios asociados a valores propios distintos son ortogonales.*

Como consecuencia, dado que podemos calcular bases ortonormales de los subespacios propios , al unir éstas se obtiene una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ de vectores propios ya que la matriz A es diagonalizable.

Proposición 8 *Si* B *es una base ortonormal de* $\mathbb{R}^n$ *con el producto escalar canónico y* P *es la matriz cuyos vectores columna son los vectores de* B*, entonces* P *es ortogonal.*

De los dos hechos anteriores se obtienen:

Teorema 2 *Toda matriz real simétrica es diagonalizable ortogonalmente.*

Bibliografía

1. R. Barbolla, P. Sanz, *Álgebra Lineal y teoría de matrices.* Ed. Prentice Hall.

2. J. Burgos, *Curso de Álgebra y Geometría.* Ed. Alhambra Longman.

3. J. S. Canovas, J. A. Murillo, *Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería.* Ed. Diego Marín.

4. A. De la Villa, *Problemas de Álgebra Lineal con esquemas teóricos.* CLAGSA.

5. J. R. Torregrosa, C. Jordán, *Álgebra Lineal y sus aplicaciones.* Ed. McGraw-Hill.