Diagonalización de matrices

Juan Medina Molina

20 de diciembre de 2004

Introducción

En este tema trataremos el problema de la diagonalización de matrices reales que consiste en dada una matriz cuadrada real, encontrar una matriz diagonal semejante. La traducción al lenguaje de aplicaciones lineales del problema anterior es el de dado un endomorfismo de un espacio vectorial real, tratar de encontrar una base tal que la matriz respecto de esta base sea diagonal. Como aplicación veremos cómo se pueden calcular potencias de matrices diagonalizables.

Los apartados de este tema son:

- Valores propios, vectores propios y polinomio característico de una matriz.
- Definición y caracterización de matrices diagonalizables.
- Una aplicación de la diagonalización al cálculo de potencias de matrices diagonalizables. El teorema de Cayley-Hamilton.

Valores propios, vectores propios y polinomio característico de una matriz

En este tema trabajaremos únicamente con el cuerpo de los números reales.

Definición 1 *Sea $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Diremos que λ es un valor propio de A si existe $\mathbf{v} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que*

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Entonces diremos que $\mathbf{v}$ *es un vector propio asociado al valor propio* λ. *Se define el subespacio propio asociado al valor propio* λ *como:*

$$V_\lambda = \{\mathbf{v} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \}.$$

Proposición 1 *Sean* $\lambda, \nu \in \mathbb{R}$ *valores propios distintos de* $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. *Entonces:*

i) $V_\lambda \leq \mathbb{R}^n$.

ii) $V_\lambda \cap V_\nu = 0$.

iii) Si $\{v_1, \ldots, v_r\} \subseteq V_\lambda$ *y* $\{w_1, \ldots, w_s\} \subseteq V_\nu$ *son sistemas libres entonces* $\{v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_s\}$ *es un sistema libre.*

Veamos como obtener los valores propios:

Proposición 2 $\lambda \in \mathbb{R}$ *es un valor propio de* A *si y sólo si* $|A - \lambda I_n| = 0$.

Definición 2 *Se define el polinonio característico de* $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ *como* $p(x) = |A - xI_n|$.

De la proposición anterior se deduce que los valores propios de una matriz cuadrada son las raíces de su polinomio característico.

Entonces se define la multiplicidad de un valor propio de una matriz cuadrada como la multiplicidad de éste como raíz de su polinomio característico.

Definición y caracterización de matrices diagonalizables

Definición 3 *Diremos que* $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ *es diagonalizable si es semejante a una matriz diagonal, o sea, si existe una matriz diagonal* $D \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ *y una matriz invertible* $P\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ *tales que* $D = P^{-1}AP$. *Entonces diremos que* P *es una matriz de paso.*

Pasamos a dar una caracterización de cuándo una matriz es diagonalizable:

Teorema 1 *Sea* $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ *y* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ *los distintos valores propios de* A *con multiplicidades* $m_1, m_2, \ldots, m_r$ *respectivamente. Sea* $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ *el polinomio característico de* A. *Entonces son equivalentes:*

i) A *es diagonalizable.*

ii) a) $p(x)$ *se puede expresar como producto de polinomios de grado* 1.

b) $m_i = \mathbf{dim} V_{\lambda_i}$, $1 \le i \le r$ *o equivalentemente, si* $m_i = n - \mathbf{rg}(A - \lambda_i \mathbf{I}_n)$, $1 \le i \le r$.

Definición 4 *Si una matriz* A *es diagonalizable, la unión de bases de los subespacios propios es base de* $\mathbb{R}^n$. *A ésta se le llama base de vectores propios de* A.

Proposición 3 *Las matrices reales cuadradas de orden* n *cuyo polinomio característico tiene* n *raíces distintas y las matrices simétricas son diagonalizables.*

Pasamos a introducir el proceso práctico a seguir para el cálculo de una matriz diagonal semejante de una matriz diagonalizable y una matriz de paso asociado a dicha matriz diagonal.

Si A es una matriz diagonalizable cuyos valores propios son $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ con multiplicidades $m_1, m_2, \ldots, m_r$ respectivamente, entonces A es semejante a la matriz diagonal D donde $d_{ii} = \lambda_1$ $1 \le i \le m_1$, $d_{ii} = \lambda_2$ $m_1 + 1 \le i \le m_2$, etc., y una matriz de paso asociada a dicha matriz es la matriz cuyos m_1 primeros vectores columnas son los elementos de una base de V_{λ_1}, los m_2 siguientes vectores columnas son los elementos de una base de V_{λ_2}, etc...

Pasamos ahora a hablar de la diagonalización de endomorfismos.

Si f es un endomorfismo de $\mathbb{R}^n$, B es la base canónica de $\mathbb{R}^n$ y $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, se definen los valores propios de f, multiplicidades de éstos, vectores propios de f, polinomio característico de f, etc., a los respectivos de A. Entonces se dice que f es diagonalizable si lo es A. Así, f es diagonalizable si y sólo si existe una base B de $\mathbb{R}^n$ tal que $\mathbf{M}_B(f)$ es diagonal.

Una aplicación de la diagonalización al cálculo de potencias de matrices diagonalizables. El teorema de Cayley-Hamilton

Pasamos a dar una aplicación de la diagonalización para el cálculo de la potencia n-ésima de una matriz diagonalizable.

Supongamos que $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ es diagonalizable y $k \in \mathbb{N}$, $k \ge 2$. Entonces existe $P \in \mathbf{GL}_n(K)$ y una matriz diagonal D de orden n tal que $D = P^{-1}AP$ de donde $A = PDP^{-1}$. Entonces:

$$A^k = \overbrace{(PDP^{-1})(PDP^{-1})\ldots(PDP^{-1})}^{k \text{ veces}} = P\,\overbrace{(DD\ldots D)}^{k \text{ veces}}\,P^{-1} = PD^kP^{-1},$$

lo cual nos da un nuevo método para el cálculo de la potencia n-ésima de dicha matriz que puede ser más sencillo que calcularla por la definición, dado que la potencia n-ésima de una matriz diagonal es aquella matriz diagonal cuyo elemento (i,i) es la potencia n-ésima del elemento (i,i) de la matriz original.

Finalmente, damos el Teorema de Cayley-Hamilton que permite, entre otras cosas, resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes (éstos no son estudiados en este curso por limitación de tiempo). Si $p(x) = a_m x^m + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$ y $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, se define $p(A) = a_m A^m + \ldots + a_1 A + a_0 I_n$.

Teorema 2 *Si $p(x)$ es el polinomio característico de A, entonces $p(A) = 0$.*

El resultado anterior también permite calcular la matriz inversa de una matriz cuadrada regular. Si $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ y $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0$, dado que $p(A) = 0$, se tiene que:

$0 = A^{-1}p(A) = A^{-1}(A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots a_1 A + a_0 I_n) = A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \ldots + a_1 I_n + a_0 A^{-1}$, de donde despejando A^{-1} se obtiene

$$A^{-1} = \frac{-1}{a_0}(A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \ldots + a_1 I_n).$$

Bibliografía

1. R. Barbolla, P. Sanz, *Álgebra Lineal y teoría de matrices.* Ed. Prentice Hall.

2. J. Burgos, *Curso de Álgebra y Geometría.* Ed. Alhambra Longman.

3. J. S. Canovas, J. A. Murillo, *Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería.* Ed. Diego Marín.

4. A. De la Villa, *Problemas de Álgebra Lineal con esquemas teóricos.* CLAGSA.

5. J. R. Torregrosa, C. Jordán, *Álgebra Lineal y sus aplicaciones.* Ed. McGraw-Hill.