Resumen y algunas demostraciones del tema de aplicaciones lineales

Juan Medina Molina

14 de diciembre de 2003

Introducción

En este tema estudiaremos las aplicaciones lineales entre espacios vectoriales que son aplicaciones que respetan la estructura de espacio vectorial. El resultado más importante nos dice que cada aplicación lineal viene determinada por las imágenes de los elementos de una base, lo que permite asociar a una aplicación lineal, una base del dominio y otra del codominio, una matriz que representa a dicha aplicación respecto de dichas bases. Además introduciremos las matrices de cambio de base, que permiten a partir de las coordenadas de un vector respecto de una base, obtener sus coordenadas respecto de otra base.

Este tema ha quedado dividido en los siguientes apartados:

- Definición y primeras propiedades.
- Teorema de existencia y unicidad de la aplicación lineal.
- Tipos de aplicaciones lineales.
- Matrices asociadas a una aplicación lineal. Matrices de cambio de base.
- Matrices equivalentes y matrices semejantes.

Definición y primeras propiedades

En primer lugar se introduce el concepto de aplicación lineal entre espacios vectoriales:

Definición 1 *Si V, W son K-espacios vectoriales, una aplicación $f : V \longrightarrow W$ se dice que es una aplicación lineal u homomorfo si verifica:*

1. $f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$.
2. $f(\alpha\mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x})$ $\forall \alpha \in K$ *y* $\forall \mathbf{x} \in V$.

La definición anterior es equivalente a:

Proposición 1 *Sean V, W K-espacios vectoriales y sea $f : V \longrightarrow W$ una aplicación. Entonces:*

f es aplicación lineal si y sólo si $f(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}) = \alpha f(\mathbf{x}) + \beta f(\mathbf{y})$ $\forall \alpha, \beta \in K$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$.

Definición 2 *Si $f, g : V \longrightarrow W$ son aplicaciones lineales y $\alpha \in K$ entonces $f + g : V \longrightarrow W$ tal que $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ y $\alpha f : V \longrightarrow W$ tal que $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ son aplicaciones lineales.*

Se verifica que el conjunto de todas las aplicaciones lineales entre dos K-espacios vectoriales tiene también estructura de K-espacio vectorial para las leyes anteriores.

Proposición 2 *Sea $f : V \longrightarrow W$ una aplicación lineal. Entonces:*

i) $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

ii) *Si* $\mathbf{x} \in V$ *entonces* $f(-\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x})$.

iii) *Si* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ *y* $\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n} \in V$ *entonces* $f(\alpha_1\mathbf{x_1} + \ldots + \alpha_n\mathbf{x_n}) = \alpha_1 f(\mathbf{x_1}) + \ldots + \alpha_n f(\mathbf{x_n})$.

iv) *Si* $S \leq V$ *entonces* $f(S) \leq W$. *Así,* $\mathbf{Im} f \leq W$.

v) *Si* $g : W \longrightarrow Z$ *es otra aplicación lineal entonces* $g \circ f : V \longrightarrow Z$ *es aplicación lineal.*

vi) *Si* $\tilde{S} \leq W$ *entonces* $f^{-1}(\tilde{S}) \leq V$.

vii) *Si* f *es biyectiva entonces* $f^{-1} : W \longrightarrow V$ *es aplicación lineal biyectiva.*

Teorema de la existencia y unicidad de la aplicación lineal

Las aplicaciones lineales quedan totalmente determinadas por las imágenes de los elementos de una base del dominio:

Teorema 1 *Sean V, W espacios vectoriales, $B = \{\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_n}\}$ una base de V y $\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_n}$ elementos de W (no necesariamente distintos). Entonces existe una única aplicación lineal $f : V \longrightarrow W$ tal que $f(\mathbf{e_i}) = \mathbf{u_i}$, $1 \leq i \leq n$.*

Demostración. Si $\mathbf{v} \in V$, dado que B es base de V, existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ tales que $\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{e}_n$. Entonces defininimos:

$$f(\mathbf{v}) = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{u}_n.$$

Veamos que f es una aplicación lineal.

Sean $\alpha, \beta \in K$ y $v, w \in V$. Entonces existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ tales que $\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{e}_n$ y $\beta_1, \ldots, \beta_n \in K$ tales que $\mathbf{w} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \ldots + \beta_n\mathbf{e}_n$. Entonces por definición de f se tiene que $f(\mathbf{v}) = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{u}_n$ y $f(\mathbf{w}) = \beta_1\mathbf{u}_1 + \ldots + \beta_n\mathbf{u}_n$.

Dado que $\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w} = \alpha(\alpha_1\mathbf{e_1} + \ldots + \alpha_n\mathbf{e_n}) + \beta(\beta_1\mathbf{e_1} + \ldots + \beta_n\mathbf{e_n}) = (\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1)\mathbf{e_1} + \ldots + (\alpha\alpha_n + \beta\beta_n)\mathbf{e_n}$ se tiene que $f(\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}) = (\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1)\mathbf{u_1} + \ldots + (\alpha\alpha_n + \beta\beta_n)\mathbf{u_n}$.

Por otra parte, $\alpha f(\mathbf{v}) + \beta f(\mathbf{w}) = \alpha(\alpha_1\mathbf{u}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{u}_n) + \beta(\beta_1\mathbf{u}_1 + \ldots + \beta_n\mathbf{u}_n) = (\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1)\mathbf{u_1} + \ldots + (\alpha\alpha_n + \beta\beta_n)\mathbf{u_n} = f(\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w})$.

Además:

Dado que $\mathbf{e_1} = 1\mathbf{e_1} + 0\mathbf{e_2} + \ldots + 0\mathbf{e_n}$ entonces $f(\mathbf{e_1}) = 1\mathbf{u_1} + 0\mathbf{u_2} + \ldots + 0\mathbf{u_n} = \mathbf{u}_1$.

Dado que $\mathbf{e_2} = 0\mathbf{e_1} + 1\mathbf{e_2} + \ldots + 0\mathbf{e_n}$ entonces $f(\mathbf{e_2}) = 0\mathbf{u_1} + 1\mathbf{u_2} + \ldots + 0\mathbf{u_n} = \mathbf{u}_2$.

...

Dado que $\mathbf{e_n} = 0\mathbf{e_1} + 0\mathbf{e_2} + \ldots + 1\mathbf{e_n}$ entonces $f(\mathbf{e_n}) = 0\mathbf{u_1} + 0\mathbf{u_2} + \ldots + 1\mathbf{u_n} = \mathbf{u}_n$.

Finalmente, si $g : V \longrightarrow W$ es otra aplicación lineal tal que $g(\mathbf{e_i}) = \mathbf{u_i}$ $1 \leq i \leq n$, entonces, si $v \in V$, existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ tales que $\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{e}_n$ luego:

$f(\mathbf{v}) = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{u}_n$ y

$g(\mathbf{v}) = g(\alpha_1\mathbf{e}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{e}_n) = \alpha_1 g(\mathbf{e}_1) + \ldots + \alpha_n g(\mathbf{e}_n) = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{u}_n = f(\mathbf{v})$.

Tipos de aplicaciones lineales

Definición 3 *Sea $f : V \longrightarrow W$ una aplicación lineal. Entonces:*

i) Diremos que f es un monomorfismo si f es inyectiva.

ii) Diremos que f es un epimorfismo si f es suprayectiva.

iii) Diremos que f es un isomorfismo si f es biyectiva. Entonces diremos que V y W son isomorfos y escribiremos $V \cong W$.

iv) Diremos que f es un endomorfismo si $W = V$, o sea, si $f : V \longrightarrow V$.

v) Diremos que f es un automorfismo si es un endomorfismo biyectivo.

Definición 4 *Si $f : V \longrightarrow W$ es una aplicación lineal, se define el núcleo de f como:*

$$\mathbf{Ker} f = \{\mathbf{x} \in V \mid f(x) = 0\}.$$

Dado que $\mathbf{Ker} f = f^{-1}(0) \leq V$, $\mathbf{Ker} f \leq V$.

Proposición 3 *Una aplicación lineal $f : V \longrightarrow W$ es inyectiva si y sólo si $\mathbf{Ker} f = 0$.*

Además, se obtiene las siguientes caracterizaciones para aplicaciones lineales:

Teorema 2 *Sea $f : V \longrightarrow W$ una aplicación lineal y $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de V. Entonces:*

i) f es inyectiva si y sólo si $\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$ es sistema libre.

ii) f es suprayectiva si y sólo si $\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$ es sistema generador de W.

iii) f es biyectiva si y sólo si $\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$ es base de W.

Si V es un K-espacio vectorial de dimensión n, $B = \{e_1, ..., e_n\}$ es una base de V y $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es la base canónica de K^n entonces, por el teorema de existencia y unicidad de la aplicación lineal, existe una aplicación lineal $f : V \longrightarrow K^n$ tal que $f(e_i) = u_i$, $1 \leq i \leq n$ y así, por la propiedad anterior, f es un isomorfismo, luego V y K^n son isomorfos. De esto se deduce que dos espacios vectoriales finitamente generados son isomorfos si y sólo si sus dimensiones coinciden.

Proposición 4 *Si V, W son espacios vectoriales finitamente generados y $f : V \longrightarrow W$ es una aplicación lineal, entonces*

$$\mathbf{dim}\ V = \mathbf{dim}\ \mathbf{Ker} f + \mathbf{dim}\ \mathbf{Im} f.$$

Matrices asociadas a una aplicación lineal. Matrices de cambio de base

Sean V, W espacios vectoriales con bases $B = \{\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_m}\}$ y $B' = \{\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_n}\}$ respectivamente y sea $f : V \longrightarrow W$ una aplicación lineal. Entonces:

$f(\mathbf{e_1}) \in W$ luego existen $a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1} \in K$ tales que $f(\mathbf{e_1}) = a_{11}\mathbf{u_1} + a_{21}\mathbf{u_2} + \ldots + a_{n1}\mathbf{u_n} = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1})_{B'}$.

$f(\mathbf{e_2}) \in W$ luego existen $a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{n2} \in K$ tales que $f(\mathbf{e_2}) = a_{12}\mathbf{u_1} + a_{22}\mathbf{u_2} + \ldots + a_{n2}\mathbf{u_n} = (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{n2})_{B'}$.

$\ldots$

$f(\mathbf{e_m}) \in W$ luego existen $a_{1m}, a_{2m}, \ldots, a_{nm} \in K$ tales que $f(\mathbf{e_m}) = a_{1m}\mathbf{u_1} + a_{2m}\mathbf{u_2} + \ldots + a_{nm}\mathbf{u_n} = (a_{1m}, a_{2m}, \ldots, a_{nm})_{B'}$.

Entonces se define la matriz de f respecto de las bases B y B' como:

$$\mathbf{M}_{B,B'}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Sea $\mathbf{x} \in V$. Entonces existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in K$ tales que $\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{e}_m$, luego:

$f(\mathbf{v}) = f(\alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \ldots + \alpha_m\mathbf{e}_m) = \alpha_1 f(\mathbf{e}_1) + \alpha_2 f(\mathbf{e}_2) + \ldots + \alpha_m f(\mathbf{e}_m) = \alpha_1(a_{11}\mathbf{u_1} + a_{21}\mathbf{u_2} + \ldots + a_{n1}\mathbf{u_n}) + \alpha_2(a_{12}\mathbf{u_1} + a_{22}\mathbf{u_2} \ldots + a_{n2}\mathbf{u_n}) + \ldots + \alpha_m(a_{1m}\mathbf{u_1} + a_{2m}\mathbf{u_2} + \ldots + a_{nm}\mathbf{u_n}) = (\alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} + \ldots + \alpha_m a_{1m})\mathbf{u_1} + (\alpha_1 a_{21} + \alpha_2 a_{22} + \ldots + \alpha_m a_{2m})\mathbf{u_2} + \ldots + (\alpha_1 a_{n1} + \alpha_2 a_{n2} + \ldots + \alpha_m a_{nm})\mathbf{u_n} = (\alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} + \ldots + \alpha_m a_{1m}, \alpha_1 a_{21} + \alpha_2 a_{22} + \ldots + \alpha_m a_{2m}, \ldots, \alpha_1 a_{n1} + \alpha_2 a_{n2} + \ldots + \alpha_m a_{nm})_{B'}$.

Por otra parte, $\mathbf{M}_{B,B'}(f) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1m}\alpha_m \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{2m}\alpha_m \\ \vdots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \cdots + a_{nm}\alpha_m \end{pmatrix}.$$

Así, si $\mathbf{x} \in V$ y multiplicamos la matriz $\mathbf{M}_{B,B'}(f)$ por una matriz columna cuyos elementos son las coordenadas de $\mathbf{x}$ respecto de la base B, se obtiene una matriz columna cuyos elementos son las coordenadas de $f(\mathbf{x})$ respecto de la base B'.

Si f es un endomorfismo de V, se denota por $\mathbf{M}_B(f)$ a $\mathbf{M}_{B,B}(f)$.

Si B y B' son bases de un espacio vectorial V, se define la matriz de cambio de base de B a B' como $\mathbf{M}_{B,B'}(\mathbf{1}_V)$.

Este nombre queda justificado ya que si $\mathbf{x} \in V$ entonces al multiplicar dicha matriz por un vector columna cuyos elementos son las coordenadas de $\mathbf{x}$ respecto de la base B, por lo anterior, se obtiene un vector columna cuyos elementos son las coordenadas de $\mathbf{x}$ respecto de la base B'.

Definición 5 *Se define el rango de una aplicación lineal $f : V \longrightarrow W$ como la dimensión de $\mathbf{Im}f$.*

Proposición 5 *Sean V, W y Z espacios vectoriales. Entonces:*

1. *Si $f, g : V \longrightarrow W$ son aplicaciones lineales, $\alpha \in K$ y B_1, B_2 son bases de V y W respectivamente, entonces*
$$\mathbf{M}_{B_1,B_2}(f+g) = \mathbf{M}_{B_1,B_2}(f) + \mathbf{M}_{B_1,B_2}(g)$$
y
$$\mathbf{M}_{B_1,B_2}(\alpha f) = \alpha \mathbf{M}_{B_1,B_2}(f).$$

2. *Si $f : V \longrightarrow W$ y $g : W \longrightarrow Z$ son aplicaciones lineales y B_1, B_2, B_3 son bases de V, W y Z respectivamente, entonces*
$$\mathbf{M}_{B_1,B_3}(g \circ f) = \mathbf{M}_{B_2,B_3}(g)\mathbf{M}_{B_1,B_2}(f).$$

3. *Supongamos que $\mathbf{dim}\ V = m$, $\mathbf{dim}\ W = n$ y sean B_1, B_2 bases de V y W respectivamente. Sea $f : V \longrightarrow W$ una aplicación lineal y denotemos por $A = \mathbf{M}_{B_1,B_2}(f)$. Entonces $\mathbf{rg}A = \mathbf{rg}f$ y además:*

   i) f es inyectiva si y sólo si $\mathbf{rg}A = m$.

   ii) f es suprayectiva si y sólo si $\mathbf{rg}A = n$.

   iii) f es biyectiva si y sólo si $\mathbf{rg}A = m = n$.

4. *Si B_1, B_2 son bases de V y W respectivamente y $f : V \longrightarrow W$ es un isomorfismo, entonces*
$$\mathbf{M}_{B_2,B_1}(f^{-1}) = \mathbf{M}_{B_1,B_2}(f)^{-1}.$$

5. *Las matrices de cambio de base son invertibles. Además, si B y B' son bases de V, entonces*
$$\mathbf{M}_{B',B}(\mathbf{1}_V) = (\mathbf{M}_{B,B'}(\mathbf{1}_V))^{-1}.$$

6. *Si B_1 y B_1' son bases de V, B_2 y B_2' son bases de W y $f : V \longrightarrow W$ es una aplicación lineal, entonces*
$$\mathbf{M}_{B_1',B_2'}(f) = \mathbf{M}_{B_2,B_2'}(\mathbf{1}_W)\mathbf{M}_{B_1,B_2}(f)\mathbf{M}_{B_1',B_1}(\mathbf{1}_V).$$

Matrices equivalentes y matrices semejantes

Proposición 6 *Sean* $A, C \in \mathbf{M}_{n,m}(K)$. *Entonces, si* V *y* W *son espacios vectoriales de dimensiones* m *y* n *respectivamente,* A *y* C *son equivalentes si y sólo si representan la misma aplicación lineal* $f : V \longrightarrow W$ *respecto de bases diferentes, es decir, si existen* B_1 *y* B_1' *bases de* V, B_2 *y* B_2' *bases de* W, *tales que* $A = \mathbf{M}_{B_1,B_2}(f)$ *y* $C = \mathbf{M}_{B_1',B_2'}(f)$.

Definición 6 *Sean* $A, C \in \mathbf{M}_n(K)$. *Diremos que* A *y* C *son matrices semejantes si existe* $P \in \mathbf{GL}_n(K)$ *tal que* $C = P^{-1}AP$.

Proposición 7 *Sean* $A, C \in \mathbf{M}_n(K)$. *Si* V *es un espacio vectorial de dimensión* n, A, C *son semejantes si y sólo existen bases* B *y* B' *de* V *tales que* $A = \mathbf{M}_B(f)$ *y* $C = \mathbf{M}_{B'}(f)$.

Bibliografía

1. R. Barbolla, P. Sanz, *Álgebra Lineal y teoría de matrices.* Ed. Prentice Hall.

2. J. Burgos, *Curso de Álgebra y Geometría.* Ed. Alhambra Longman.

3. J. S. Canovas, J. A. Murillo, *Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería.* Ed. Diego Marín.

4. A. De la Villa, *Problemas de Álgebra Lineal con esquemas teóricos.* CLAGSA.

5. J. R. Torregrosa, C. Jordán, *Álgebra Lineal y sus aplicaciones.* Ed. McGraw-Hill.