MATRICES, DETERMINANTES Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

1. Matrices.

1.1 Definición. *Sea K un cuerpo y $n, m \in \mathbb{N}^*$. Una matriz $n \times m$ sobre K es una aplicación:*

$$A : \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, m\} \longrightarrow K.$$

Si $(i, j) \in \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, m\}$ denotaremos $a_{ij} = A(i, j)$ y diremos que a_{ij} es el elemento (i, j) de A.

Denotaremos por $\mathrm{M}_{n\times m}(K)$ el conjunto de las matrices $n \times m$ sobre K.

La forma de representar la matriz anterior es ordenando las imágenes por A en una caja que consta de n filas y m columnas de la siguiente forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Así, diremos que A tiene n filas y m columnas.

Para abreviar escribiremos $A = (a_{ij})$ para referirnos a la matriz anterior.

A los n vectores $(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1m}), (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2m}), \dots, (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nm}) \in K^m$ se les llama vectores fila de A y a los m vectores de K^n $(a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}), (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{n2}), \dots, (a_{1m}, a_{2m}, \dots, a_{nm})$ se les llama vectores columna de A.

Una matriz real es una matriz con elementos en $\mathbb{R}$ y una matriz compleja es una matriz con elementos en $\mathbb{C}$.

1.2 Definición. *Dada la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n\times m}(K)$$

se define la matriz traspuesta de A a:

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$$

.

1.3 Ejemplo. Si $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ entonces $A^T = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$.

Si $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$ entonces $B^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$.

1.4 Definición. *Dada $A \in \mathrm{M}_{n\times m}(K)$, diremos que A es cuadrada si $n = m$. Denotaremos por $\mathrm{M}_n(K)$ al conjunto $\mathrm{M}_{n\times n}(K)$.*

1.5 Definición. *Dada $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{n\times m}(K)$, a la r-tupla $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{rr})$, donde $r = \min\{n, m\}$, se le llama diagonal principal de A.*

1.6 Definición. *Dada $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{n\times m}(K)$ se define la matriz opuesta de A a $-A = (b_{ij}) \in \mathrm{M}_{n\times m}(K)$ donde $b_{ij} = -a_{ij}$ $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$.*

1.7 Definición. *Se define la matriz* $0_{n\times m} = (c_{ij}) \in \mathrm{M}_{n\times m}(K)$ *donde* $c_{ij} = 0$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$.

1.8 Definición. *Sea* $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{n\times m}(K)$.

i) *Diremos que* A *es una matriz fila si* $n = 1$.

ii) *Diremos que* A *es una matriz columna si* $m = 1$.

1.9 Definición. *Sea* $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(K)$.

i) *Diremos que* A *es diagonal si* $a_{ij} = 0$ *si* $i \neq j$.

ii) *Diremos que* A *es triangular superior si* $a_{ij} = 0$ *si* $i > j$.

iii) *Diremos que* A *es triangular inferior si* $a_{ij} = 0$ *si* $i < j$.

iv) *Diremos que* A *es simétrica si* $A^{\mathrm{T}} = A$.

v) *Diremos que* A *es antisimétrica si* $A^{\mathrm{T}} = -A$.

Notar que si una matriz cuadrada es antisimétrica entonces la diagonal principal es el vector nulo.

vii) *Una matriz escalar es una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal principal son todos iguales.*

viii) *Se define la matriz unidad de orden* n *y se denota* I_n *a la matriz escalar cuyos elementos de la diagonal principal son* 1.

1.10 Definición. *Sea* $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{n\times m}(K)$, $i_1, i_2, \ldots, i_r \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *y* $j_1, j_2, \ldots, j_s \in \{1, 2 \ldots, m\}$ *con* $i_1 < i_2 < \ldots < i_r$ *y* $j_1 < j_2 < \ldots < j_s$. *Entonces la matriz que resulta de eliminar las filas distintas de* $i_1, i_2, \ldots, i_r$ *y las columnas distintas de* $j_1, j_2, \ldots, j_s$ *o sea*

$$\begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \ldots & a_{i_1 j_s} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \ldots & a_{i_2 j_s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_r j_1} & a_{i_r j_2} & \ldots & a_{i_r j_s} \end{pmatrix}$$

se dice que es una submatriz de orden $r \times s$ *de* A.

1.11 Ejemplo. Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$. Las submatrices de orden 2×2 de A son:

$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix},$

$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$

$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$

1.12 Definición. *Un bloque es una submatriz donde las filas no eliminadas son consecutivas y las columnas no eliminadas son consecutivas.*

1.13 Ejemplo. Los bloques de orden 2×2 de la matriz anterior son:

$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$

1.14 Definición. *Sea $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{n\times m}(K)$. Sea $n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}^*$ tales que $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$ y $m_1, m_2, \ldots, m_s \in \mathbb{N}^*$ tales que $m_1 + m_2 + \ldots + m_s = m$. Entonces si $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ y $j \in \{1, 2, \ldots, s\}$ sea A_{ij} la matriz que resulta de excluir las filas $1, 2, \ldots, n_1 + \ldots + n_{i-1}, n_1 + \ldots + n_i + 1, \ldots, n$ y las columnas $1, 2, \ldots, m_1 + \ldots + m_{j-1}, m_1 + \ldots + m_j + 1, \ldots, m$. Entonces*

$$A = \begin{pmatrix} A_{n_1,m_1} & A_{n_1,m_2} & \ldots & A_{n_1,m_s} \\ A_{n_2,m_1} & A_{n_2,m_2} & \ldots & A_{n_2,m_s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n_r,m_1} & A_{n_r,m_2} & \ldots & A_{n_r,m_s} \end{pmatrix}$$

y diremos que hemos descompuesto A en bloques.

Operaciones con matrices.

Sea K un cuerpo y $n, m, r \in \mathbb{N}^*$.

1. Suma.

Si $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{n\times m}(K)$ y $B = (b_{ij}) \in \mathrm{M}_{n\times m}(K)$ definimos $A + B = (c_{ij}) \in \mathrm{M}_{n\times m}(K)$ donde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$.

1.15 Proposición. $(\mathrm{M}_{n\times m}(K),+)$ *es un grupo abeliano.*

2. Ley externa.

Si $A=(a_{ij})\in \mathrm{M}_{n\times m}(K)$ *y* $\alpha\in K$ *definimos* $\alpha A=(c_{ij})\in \mathrm{M}_{n\times m}(K)$ *donde* $c_{ij}=\alpha a_{ij}$, $1\le i\le n$, $1\le j\le m$.

1.16 Proposición. $(\mathrm{M}_{n\times m}(K),+)$ *es un* K*-espacio vectorial.*

Producto de matrices.

Si $A=(a_{ij})\in \mathrm{M}_{n\times m}(K)$ *y* $B=(b_{ij})\in \mathrm{M}_{m\times r}(K)$ *se define* $AB=(c_{ij})\in \mathrm{M}_{n\times r}(K)$ *donde* $c_{ij}=\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}$, $1\le i\le n$, $1\le j\le r$.

Notar que sólo hemos definido el producto de dos matrices cuando el número de columnas de la primera coincide con el número de filas de la segunda.

1.17 Ejemplos. $\begin{pmatrix} -5 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -10 & 17 \end{pmatrix}.$

$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 16 \end{pmatrix}.$

$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 10 & 8 & 6 \\ 1 & -5 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$

$\begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ no se puede calcular.

1.18 Proposición. *Sea* $n,m,r,s\in\mathbb{N}^*$.

i) *Si* $A\in \mathrm{M}_{n\times m}(K)$, $B\in \mathrm{M}_{m\times r}(K)$ *y* $C\in \mathrm{M}_{r\times s}(K)$ *entonces* $(AB)C=A(BC)$.

ii) *Si* $A\in \mathrm{M}_{n\times m}(K)$ *y* $B,C\in \mathrm{M}_{m\times r}(K)$ *entonces* $A(B+C)=AB+AC$.

iii) *Si* $A\in \mathrm{M}_{n\times m}(K)$ *entonces* $A\mathrm{I}_m=A$ *y* $\mathrm{I}_nA=A$.

Rango de una matriz.

1.19 Proposición. *Si* $A\in \mathrm{M}_{n\times m}(K)$ *entonces el rango del conjunto de los* n *vectores fila en* K^m *coincide con el rango del conjunto de los* m *vectores columna en* K^n.

1.20 Definición. *Si* $A \in \mathrm{M}_{n\times m}(K)$ *se define el rango de* A *y se denota* $\mathrm{rg}A$ *al rango del conjunto de los vectores fila (que coincide con el rango del conjunto de los vectores columna).*

Transformaciones elementales.

Sea $A \in \mathrm{M}_{n\times m}(K)$*. Las transformaciones elementales de* A *son:*

1. *Intercambiar dos filas (columnas) de* A*.*

2. *Si* $\alpha \in K \setminus \{0\}$*, sustituir una fila (columna) por el producto de* α *por esta fila (columna).*

3. *Si* $\alpha \in K$*, sustituir una fila (columna) de* A *por la suma de ésta más otra fila (columna) multiplicada por* α*.*

Como consecuencia de un resultado del Capítulo de Espacios Vectoriales se obtiene el siguiente Teorema:

1.21 Teorema. *El rango de una matriz no varía al realizar una operación elemental sobre ésta.*

1.22 Definición. *Dadas* $A, B \in \mathrm{M}_{n\times m}(K)$ *diremos que* A *y* B *son equivalentes si existen* $P \in \mathrm{M}_n(K)$ *y* $Q \in \mathrm{M}_m(K)$ *tales que* $B = PAQ$*.*

1.23 Proposición. *Sean* $A, B \in \mathrm{M}_{n\times m}(K)$*. Entonces:*

i) A *y* B *son equivalentes* $\Leftrightarrow \mathrm{rg}A = \mathrm{rg}B$*.*

ii) $\mathrm{rg}A = r \Leftrightarrow A$ *es equivalente a* $\begin{pmatrix} I_r & 0_{r\times(m-r)} \\ 0_{(n-r)\times r} & 0_{(n-r)\times(m-r)} \end{pmatrix}$.

Matrices Invertibles.

Sea $n \in \mathbb{N}^*$ y K un cuerpo.

1.24 Definición. *Dada* $A \in \mathrm{M}_n(K)$ *diremos que* A *es invertible, regular o no singular si existe* $B \in \mathrm{M}_n(K)$ *tal que* $AB = BA = \mathrm{I}_n$*. Entonces diremos que* B *es una matriz inversa de* A*.*

1.25 Definición. *Denotaremos por* $\mathrm{GL}_n(K)$ *el conjunto de las matrices de* $\mathrm{M}_n(K)$ *que son invertibles.*

1.26 Proposición. *Se verifica que* $(\mathrm{GL}_n(K), \cdot)$ *tiene estructura de grupo.*

Como consecuencia de lo anterior se obtienen los dos siguientes resultados:

1.27 Proposición. *Si* $A \in \mathrm{M}_n(K)$ *es invertible entonces la matriz inversa de* A *es única. Denotaremos por* A^{-1} *la matriz inversa de* A*.*

1.28 Proposición. *Sean* $A, B \in \mathrm{GL}_n(K)$*. Entonces:*

i) $(A^{-1})^{-1} = A$.

ii) $AB \in \mathrm{GL}_n(K)$ *y* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

1.29 Proposición. *Sea* $A \in \mathrm{M}_n(K)$*. Entonces* A *es invertible* $\Leftrightarrow \mathrm{rg}A = n$*.*

Método para el cálculo de la matriz inversa de una matriz invertible.

Sea $A \in \mathrm{M}_n(K)$. Consideramos la matriz descompuesta en bloques $(A|\mathrm{I}_n)$.

Entonces realizamos operaciones elementales a las filas de esta matriz para intentar obtener en el primer bloque la matriz I_n.

Primer Caso. Si es imposible obtenerla entonces A no es invertible.

Segundo Caso. Si se obtiene, la matriz del segundo bloque es la matriz inversa de A.

2. Determinantes.

2.1 Definición. *Sea* $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(K)$*. Definimos el determinante de* A *y se denota* $|A|$ *o* $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ *de la siguiente forma:*

Si $n = 1$ entonces $|A| = |\, a_{11} \,| = a_{11}$.

Si $n = 2$ entonces $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Supongamos que tenemos definidos los determinantes de las matrices de orden $n - 1$.

Entonces definimos $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \ddots & \ddots & \vdots & \ddots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} +$

$(-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots + (-1)^{1+n} a_{1n} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}.$

Como caso particular, para el caso de $n = 3$ se tiene la regla de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

2.2 Proposición. *Sea $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(K)$.*

i) *Si B es la matriz que se obtiene al permutar dos filas (columnas) de A entonces $|B| = -|A|$.*

ii) *Si una fila (columna) de A es combinación lineal de las otras o equivalentemente, si las filas (columnas) de A son linealmente dependientes, entonces $|A| = 0$.*

iii) *Si $\lambda \in K$ y B es una matriz con las misma filas (columnas) que A excepto una fila (columna) que es la correspondiente a la de A multiplicada por λ entonces $|B| = \lambda|A|$.*

iv) *Si B es la matriz que resulta de sustituir una fila (columna) de A por la suma de ésta y una combinación lineal de las demás entonces $|A| = |B|$.*

v) $|A| = |A^{\mathrm{T}}|$.

vi) *Si $B \in \mathrm{M}_n(K)$ entonces $|AB| = |A||B|$.*

vii) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \dots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$

La propiedad análoga se da también para columnas.

viii) *Si $A \in \mathrm{M}_n(K)$, A es regular $\Leftrightarrow |A| \neq 0$.*

ix) *Si $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ entonces $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.*

x) *El determinante de una matriz triangular superior o triangular inferior coincide con el producto de los elementos de su diagonal.*

2.3 Definición. *Sea* $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(K)$ *e* $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

i) *Se define el menor complementario del elemento* (i, j) *y se denota* Δ_{ij} *al determinante de la matriz que resulta de eliminar la fila* i *y la columna* j *de* A.

ii) *Se define el adjunto del elemento* (i, j) *y se denota* A_{ij} *a* $A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$.

2.4 Proposición. *El valor de un determinante coincide con la suma de los productos de cada uno de los elementos de una fila (columna) por sus respectivos adjuntos.*

Cálculo de la matriz inversa usando determinantes.

2.5 Definición. *Dada* $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(K)$ *se define la matriz adjunta de* A *a*

$$\mathrm{Adj}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

2.6 Proposición. *Si* $A \in \mathrm{GL}(n, K)$ *entonces* $A^{-1} = \mathrm{Adj}(A)^T/|A|$.

Cálculo del rango de una matriz usando determinantes.

2.7 Definición. *Sea* $A \in \mathrm{M}_{n\times m}(K)$ *y* $r \in \mathbb{N}^*$, $r \leq \min(n, m)$. *Un menor de orden* r *de* A *es el determinante de una submatriz* $r \times r$ *de* A.

2.8 Proposición. *Dada* $A \in \mathrm{M}_{n\times m}(K)$, $\mathrm{rg}A$ *coincide con el máximo de los ordenes de sus menores no nulos.*

3. Sistemas de Ecuaciones Lineales.

Sea K un cuerpo y $n, m \in \mathbb{N}^*$.

3.1 Definición. *Un sistema de n ecuaciones y m incognitas es un conjunto de n ecuaciones en la forma:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

donde $a_{ij} \in K$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, éstos reciben el nombre de coeficientes del sistema y $b_i \in K$, $1 \leq i \leq n$, éstos reciben el nombre de términos independientes del sistema. Los $x_1, x_2, \ldots, x_m$ reciben el nombre de incognitas del sistema.

Dado $c = (c_1, c_2, \ldots, c_m) \in K^m$, diremos que c es una solución del sistema anterior si al sustituir en las ecuaciones anteriores cada x_j por c_j, $1 \leq j \leq m$, las igualdades son ciertas.

Dado el sistema anterior,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

se dice que es la matriz del sistema, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ se dice que es la matriz de los términos independientes y $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ es la matriz de las incognitas. La matriz descompuesta por bloques $A^* = (A|b)$ recibe el nombre de matriz ampliada del sistema.

Claramente el sistema anterior se puede expresar por la siguiente igualdad matricial:

$$Ax = b.$$

Esta recibe el nombre de forma matricial del sistema.

3.2 Definición. *Diremos que un sistema de ecuaciones lineales es homogéneo si el vector de los términos independientes es el vector nulo.*

3.3 Definición.

a. *Diremos que un sistema es compatible (*SC*) si tiene soluciones.*

a.1. *Diremos que un sistema es compatible determinado (*SCD*) si es compatible y sólo tiene una solución.*

a.2. *Diremos que un sistema es compatible indeterminado (*SCI*) si es compatible y no tiene una única solución.*

b. *Diremos que un sistema es incompatible si no tiene solución.*

Notar que un sistema homogéneo es siempre compatible.

3.4 Definición. *Dados dos sistemas lineales de n ecuaciones con m incognitas con coeficientes en K, diremos que son equivalentes si sus conjuntos de soluciones coinciden.*

3.5 Proposición. *Consideremos un sistema de n ecuaciones con m incognitas con coeficientes en K.*

i) *Si sustituimos una ecuación del sistema por el resultado de multiplicar dicha ecuación por un elemento de K no nulo, el sistema obtenido es equivalente al primero.*

ii) *Si sustituimos una ecuación del sistema por el resultado de sumar a esta ecuación otra ecuación multiplicada por un escalar, el sistema obtenido es equivalente al primero.*

3.6 Teorema. (Rouché-Fröbenius). *Sea $Ax = b$ un sistema de n ecuaciones con m incognitas y sea $A^* = (A|b) \in \mathrm{M}_{n\times(m+1)}(K)$. Entonces el sistema es compatible $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rg}A = \mathrm{rg}A^*$.*

i) *Si* $\mathrm{rg}A = \mathrm{rg}A^* = m$ *entonces el sistema es compatible determinado.*

ii) *Si* $\mathrm{rg}A = \mathrm{rg}A^* < m$ *entonces el sistema es compatible indeterminado. Además, en ese caso, el número de parámetros es* $m - \mathrm{rg}A$.

(Notar que m es el número de incognitas del sistema).

3.7 Proposición. *Supongamos que* $Ax = b$ *es un sistema compatible y sea* z *una solución de este sistema. Entonces el conjunto de las soluciones del sistema es*

$$\{z + t \mid At = 0\}.$$

3.8 Teorema. (Regla de Cramer). *Consideremos el sistema de* n *ecuaciones con* n *incognitas* $Ax = b$, *supongamos que* $A = (a_{ij})$ *y* $|A| \neq 0$. *Entonces:*

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|};\ x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|};\ \dots;\ x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} & b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2,n-1} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & b_n \end{vmatrix}}{|A|}.$$