Espacios vectoriales

Juan Medina Molina

21 de septiembre de 2005

Introducción

En este tema introducimos la estructura de espacio vectorial y analizamos sus propiedades.

Lo hemos dividido en los siguientes apartados:

- Espacios vectoriales. Definición y primeras propiedades.
- Subespacios vectoriales. Operaciones con susbespacios.
- Combinaciones Lineales. Sistemas Generadores. Independencia y dependencia lineal.
- Bases y dimensión.

Espacios vectoriales. Definición y primeras propiedades.

En primer lugar se introduce el concepto de espacio vectorial:

Definición 1 *Sea* $(V, +)$ *un grupo abeliano y* $(K, +, \cdot)$ *un cuerpo. Diremos que* V *es un* K*-espacio vectorial si existe una ley de composición externa* $K \times V \longrightarrow V \mid (\alpha, \mathbf{v}) \longrightarrow \alpha\mathbf{v}$ *verificando:*

1. $\alpha(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \alpha\mathbf{v} + \alpha\mathbf{w}$, $\forall \alpha \in K$, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.
2. $(\alpha + \beta)\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{v}$, $\forall \alpha, \beta \in K$, $\forall \mathbf{v} \in V$.
3. $(\alpha \cdot \beta)\mathbf{v} = \alpha(\beta\mathbf{v})$, $\forall \alpha, \beta \in K$, $\forall \mathbf{v} \in V$.
4. $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$, $\forall \mathbf{v} \in V$.

Si V es un K-espacio vectorial, a los elementos de V los llamaremos vectores y a los elementos de K los llamaremos escalares.

Ejemplos.

1. El $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ siendo $n \in \mathbb{N}$.

2. Si K es un cuerpo y $n \in \mathbb{N}$, el K-espacio vectorial K^n.

3. El $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}_n[x]$ de los polinomios con coeficientes reales y grado menor o igual que n, siendo $n \in \mathbb{N}$.

4. $\mathbb{C}$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial y como $\mathbb{C}$-espacio vectorial.

5. Presentamos un espacio vectorial un poco más complicado que los anteriores. Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de las aplicaciones $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Entonces, si $f, g \in \mathcal{F}$ se define:

   $f + g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid (f+g)(x) = f(x) + g(x)$.

   Entonces $(\mathcal{F}, +)$ es un grupo abeliano.

   Si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f \in \mathcal{F}$ se define:

   $\alpha \cdot f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid (\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$.

   Entonces $(\mathcal{F}, +)$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Se obtienen las siguientes propiedades:

Proposición 1 *Sea V un K-espacio vectorial. Entonces:*

i) $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$ *para todo* $\alpha \in K$.

ii) $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$ *para todo* $\mathbf{v} \in V$.

iii) Si $\alpha\mathbf{v} = 0$ *entonces* $\alpha = 0$ *ó* $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

iv) Si $\alpha\mathbf{v} = \beta\mathbf{v}$ *y* $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ *entonces* $\alpha = \beta$.

v) Si $\alpha\mathbf{v} = \alpha\mathbf{w}$ *y* $\alpha \neq 0$ *entonces* $\mathbf{v} = \mathbf{w}$.

vi) $\alpha(-\mathbf{v}) = (-\alpha)\mathbf{v} = -(\alpha\mathbf{v})$ *para todo* $\alpha \in K$*, para todo* $\mathbf{v} \in V$.

Subespacios vectoriales

Definición 2 *Sea V un K-espacio vectorial y $\emptyset \neq S \subseteq V$. Diremos que S es un subespacio vectorial de V si:*

i) *S es un subgrupo de V.*

ii) *Si $\lambda \in K$ y $\mathbf{v} \in S$ entonces $\lambda \mathbf{v} \in S$. (Así, tenemos una nueva ley de composición externa $K \times S \longrightarrow S$).*

Entonces escribiremos $S \leq V$.

Si $S \leq V$ entonces se tiene que con las operaciones restringidas S es un K-espacio vectorial. Además, dado que S es un subgrupo de V, el elemento neutro $\mathbf{0}$ de V está en S (propiedad 4.7 del tema anterior). Así, una forma de descartar que un subconjunto de V no es un subespacio es viendo que $\mathbf{0} \notin S$.

Ejemplo. Todo K-espacio vectorial V tiene dos subespacios que son $\{\mathbf{0}\}$ y V (uno en el caso de que $V = \{0\}$). Denotaremos por 0 el subespacio $\{\mathbf{0}\}$.

Más operativa que la definición, es la siguiente caracterización de subespacio vectorial:

Proposición 2 *Si S es un subconjunto de un espacio vectorial V, entonces son equivalentes:*

i) *$S \leq V$.*

ii) *$S \neq \emptyset$ y $\alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{y} \in S$ $\forall \alpha, \beta \in K$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$.*

Por inducción se obtiene fácilmente:

Proposición 3 *Si $S \leq V$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ y $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n} \in S$, entonces se obtiene que $\alpha_1 \cdot \mathbf{v_1} \ldots + \alpha_n \cdot \mathbf{v_n} \in S$.*

Ejemplos.
1. $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot z = -1\} \subseteq \mathbb{R}^3$ no es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.
2. $S = \{(x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4 \mid x - u = 0,\ 2x + y = 0\} \leq \mathbb{R}^4$.
Pasamos a analizar algunas operaciones de subespacios.

Proposición 4 *Si $S, T \leq V$, entonces $S \cap T \leq V$.*

Nota. En general, la unión de subespacios no es subespacio.

Ejemplo Si $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$ y $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$, entonces $S \cup T$ no es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.

Si la unión de subespacios no es subespacio, ¿Cuál es el subconjunto más pequeño que contiene a la unión que sí es subespacio? Encontraremos pronto respuesta a esta pregunta.

Definición 3 *Si $S, T \leq V$, se define la suma de S y T como*

$$S + T = \{\mathbf{v} + \mathbf{w} \mid \mathbf{v} \in S, \mathbf{w} \in T\}.$$

Proposición 5 *Si $S, T \leq V$, entonces $S+T \leq V$ y es el "menor"subespacio que contiene a S y T en el sentido de que si $S \cup T \subseteq W \leq V$ entonces $S + T \subseteq W$.*

Ejemplo

Si S y T son los subespacios del ejemplo anterior, entonces $S + T = \mathbb{R}^2$.

Definición 4 *Dados $S, T \leq V$, diremos que S y T son suma directa o que S y T son subespacios independientes si $S \cap T = 0$. Entonces denotaremos su suma por $S \bigoplus T$.*

Ejemplo

Los subespacios S y T de los ejemplos anteriores son subespacios independientes.

A continuación caracterizamos la definición anterior:

Proposición 6 *Si $S, T \leq V$, son equivalentes:*

i) *S y T son subespacios independientes.*

ii) *Si $\mathbf{0} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ con $\mathbf{x} \in S$ e $\mathbf{y} \in T$ entonces $\mathbf{x} = \mathbf{y} = \mathbf{0}$.*

iii) *Si $\mathbf{u} \in S + T$ entonces $\mathbf{u}$ se expresa de forma única como suma de un elemento de S y uno de T.*

Definición 5 *Si $S, T \leq V$, diremos que S y T son subespacios suplementarios en V si $S \bigoplus T = V$.*

Ejemplo. Los subespacios S y T de los ejemplos anteriores son suplementarios en $\mathbb{R}^2$.

Combinaciones Lineales. Sistemas Generadores. Independencia y dependencia lineal

Definición 6 *Sea V un K-espacio vectorial y $L = \{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_r}\} \subseteq V$. Dado $\mathbf{v} \in V$, diremos que $\mathbf{v}$ es combinación lineal de L si existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in K$ tal que $\mathbf{v} = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_r v_r$.*

Ejemplo.

En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, consideramos $L = \{(1,1,0),(0,1,0)\}$. Entonces considerando los escalares $2, 1$ y $-1, 1$ se obtiene los vectores $(2,3,0)$ y $(-1,0,0)$ que por lo tanto son combinación lineal de L. Se puede demostrar que el vector $(-1/2, 3, 0)$ es combinación lineal de L y que $(2,1,1)$ no lo es.

Dado que un conjunto finito de vectores no nulos no es subespacio vectorial, nos planteamos cuál es el menor subespacio que contiene a éstos. Observemos que ésta es la segunda vez que nos planteamos una pregunta de este estilo.

En Matemáticas, cuando un conjunto no satisface una propiedad nos solemos hacer dos preguntas:

1. ¿Cuál es el menor conjunto que lo contiene satisfaciendo dicha propiedad?

2. ¿Cuál es el mayor conjunto contenido en él satisfaciendo dicha propiedad?

Los conceptos de suma de subespacios y envoltura lineal (que introducimos a continuación) se obtienen de haberse planteado estas cuestiones. En el transcurso de esta asignatura, nos plantearemos estas cuestiones de nuevo para otros conceptos que introduciremos.

Definición 7 *Dado $L = \{v_1, \ldots, v_r\} \subseteq V$, se define la envoltura lineal de L o el subespacio generado por L como $\langle L\rangle = \langle v_1, \ldots, v_r\rangle = \{\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_r v_r \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_r \in K\}$ (es el conjunto de todas las combinaciones lineales de L).*

Proposición 7 *Si $L = \{v_1, \ldots, v_r\} \subseteq V$, $L \leq V$ y es el "menor"subespacio de V que contiene a L (menor en el sentido de que si $L \subseteq W \leq V$, entonces $\langle L\rangle \subseteq W$).*

Ahora damos la definición de sistema generador de un espacio vectorial:

Definición 8 *Si V es un espacio vectorial y $L = \{\mathbf{v_1}, \ldots \mathbf{v_r}\} \subseteq V$, se dice que L es un sistema generador de V si $\langle L\rangle = V$.*

Observemos que un sistema generador de un subespacio nos determina dicho subespacio.

Nota

Si L es un subconjunto finito de V, entonces claramente L es un sistema generador de $\langle L \rangle$.

Ejemplos.

1. $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ es un sistema generador de $\mathbb{R}^3$.

2. $L = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$ es un sistema generador de $\mathbb{R}^3$.

3. $L = \{(1,1,0),(1,0,0),(0,1,0)\}$ no es un sistema generador de $\mathbb{R}^3$.

La siguiente importante propiedad nos dice cómo calcular un sistema generador de una suma de subspacios y por lo tanto, de como calcular la suma de éstos.

Proposición 8 *Si $S, T \leq V$ y $L_1 = \{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_r}\}$ y $L_2 = \{\mathbf{w_1}, \ldots, \mathbf{w_s}\}$ son sistemas generadores de S y T respectivamente entonces $L_1 \cup L_2$ es un sistema generador de $S + T$.*

Además se obtienen las siguientes propiedades:

Proposición 9 *Si $L_1 = \{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_r}\} \subseteq L_2 = \{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_r}, \mathbf{v_{r+1}}, \ldots, \mathbf{v_s}\} \subseteq V$ y L_1 es un sistema generador de V entonces L_2 es también sistema generador de V.*

Proposición 10 *Si $L_1 = \{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_r}\} \subseteq V$ y $L_2 = \{\mathbf{w_1}, \ldots, \mathbf{w_s}\} \subseteq V$, L_2 es un sistema generador de V y $\mathbf{w_i} \in \langle L_1 \rangle$, $1 \leq i \leq s$ entonces L_1 es también sistema generador de V.*

Ahora damos la definición de espacios vectoriales finitamente generados.

Definición 9 *Dado un K-espacio vectorial V, diremos que V es finitamente generado si posee un sistema generador finito.*

Pasamos a introducir los conceptos relativos a independencia y dependencia lineal.

Definición 10 *Si $L = \{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_r}\} \subseteq V$, diremos que L es un sistema libre o que $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_r}$ son linealmente independientes si se verifica que si $\alpha_1 \mathbf{v_1} + \ldots + \alpha_r \mathbf{v_r} = 0$ entonces $\alpha_1, \ldots, \alpha_r = 0$. En otro caso, diremos que L es un sistema ligado o que $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_r}$ son linealmente dependientes.*

Se obtienen las siguientes propiedades:

Propiedades 1 *Sea* $L_1 = \{\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_r}\} \subseteq \{\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_r}, \mathbf{v_{r+1}}, \dots, \mathbf{v_s}\} = L_2 \subseteq V$*. Entonces:*

i) Si $\mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$*, entonces* $\{\mathbf{v}\}$ *es un sistema libre.*

ii) Si $\mathbf{0} \in L_1$*, entonces* L_1 *es un sistema ligado.*

iii) Si L_2 *es un sistema libre, entonces* L_1 *es un sistema libre.*

iv) Si L_1 *es un sistema ligado, entonces* L_2 *es un sistema ligado.*

v) Si L_1 *es un sistema libre y* $\mathbf{x}$ *no es combinación lineal de* L_1*, entonces* $L_1 \cup \{\mathbf{x}\}$ *es un sistema libre.*

vi) Si $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ *no son proporcionales, entonces* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$ *son linealmente independientes.*

Además se obtiene el siguiente resultado:

Proposición 11 *Si* $L = \{\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_r}\} \subseteq V$*, entonces:*
L *es un sistema ligado si y sólo si existe* $i \in \{1, \dots, r\}$ *tal que* $\mathbf{v_i}$ *es combinación lineal de* $\{\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_{i-1}}, \mathbf{v_{i+1}}, \dots, \mathbf{v_r}\}$*.*

Bases y dimensión

Definición 11 *Dados* L_1, L_2 *subconjuntos finitos de* V*, diremos que* L_1 *y* L_2 *son equivalentes si* $\langle L_1 \rangle = \langle L_2 \rangle$*.*

Ejemplo.
En $\mathbb{R}^2$, los conjuntos $L_1 = \{(1, 2)\}$ y $L_2 = \{(2, 4)\}$ son equivalentes. Veamos formas de obtener sistemas equivalentes más sencillos de uno dado.

Proposición 12 *Supongamos que* V *es un* K*-espacio vectorial y* $L_1 = \{\mathbf{v_1} \dots, \mathbf{v_i}, \dots, \mathbf{v_j}, \dots, \mathbf{v_r}\}$*.*

i) Si $\lambda \in K \setminus \{0\}$ *y* $L_2 = \{\mathbf{v_1} \dots, \lambda\mathbf{v_i}, \dots, \mathbf{v_j}, \dots, \mathbf{v_r}\}$*, entonces* L_1 *y* L_2 *son equivalentes.*

ii) Si $\lambda \in K$ *y* $L_2 = \{\mathbf{v_1} \dots, \mathbf{v_i}, \dots, \lambda\mathbf{v_i} + \mathbf{v_j}, \dots, \mathbf{v_r}\}$*, entonces* L_1 *y* L_2 *son equivalentes.*

Llamaremos a las transformaciones de la proposición anterior operaciones elementales de un conjunto de vectores.

Definición 12 *Si* $V \neq 0$ *es un* K*-espacio vectorial y* $B = \{\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_n}\} \subseteq V$*, se dice que* B *es una base de* V *si es un sistema libre y un sistema generador de* V*.*

Si $B = \{\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_n}\}$ es una base de V, entonces supondremos que $\mathbf{e_1}$ es el primer elemento de B, $\mathbf{e_2}$ es su segundo elemento de B, etc...

Ejemplos.

1. Si K es un cuerpo y $n \in \mathbb{N}^*$,

$$C = \{(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 1)\}$$

es una base de K^n que llamaremos base canónica de K^n.

2. En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{C}$, $\{1, \mathrm{i}\}$ es una base. Si consideramos ahora $\mathbb{C}$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial entonces $\{1\}$ es una base (sería su base canónica).

Proposición 13 *Si* $B = \{\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_r}, \mathbf{e_{r+1}}, \ldots, \mathbf{e_n}\}$ *es un base de* V *entonces* $V = \langle e_1, \ldots, e_r\rangle \bigoplus \langle e_{r+1}, \ldots, e_n\rangle$*.*

También se obtiene:

Proposición 14 *Si* $B = \{\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_n}\}$ *es una base de un espacio vectorial* V *y* $\mathbf{x} \in V$*,* $\mathbf{x}$ *se expresa de forma única como combinación lineal de los elementos de* V*.*

Definición 13 *En las condiciones de la proposición anterior, si* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$ *tales que* $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{e_1} + \alpha_2\mathbf{e_2} + \ldots + \alpha_n\mathbf{e_n}$*, diremos que* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *son las coordenadas de* $\mathbf{x}$ *respecto de la base* B *y escribiremos* $\mathbf{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)_B$*.*

Ejemplos.

1. En el K-espacio vectorial K^n, si C es su base canónica y $\mathbf{v} = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n$, entonces $\mathbf{v} = (x_1, \ldots, x_n)_C$.

2. $B = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ y $(2, 1, -1) = (2, -1, 1)_B$.

Con respecto a como se comportan las coordenadas al operar vectores, se obtiene:

Proposición 15 *Si* $B = \{\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_n}\}$ *es una base de un espacio vectorial* V*,* $\alpha \in K$ *y* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ *tales que* $\mathbf{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)_B$ *e* $\mathbf{y} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)_B$ *entonces* $\mathbf{x}+\mathbf{y} = (\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, \ldots, \alpha_n+\beta_n)_B$ *y* $\alpha\mathbf{x} = (\alpha\alpha_1, \alpha\alpha_2, \ldots, \alpha\alpha_n)_B$*.*

El siguiente resultado permite afirmar que ciertos conjuntos de vectores son sistemas libres sin tener que efectuar ningún cálculo:

Proposición 16 *Sea* $B = \{\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_n}\}$ *una base de un* K*-espacio vectorial* V. *Sea* $L = \{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_r}\} \subseteq V$ *tales que* $\mathbf{v_i} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}\mathbf{e_j}$ *con* $\lambda_{ij} = 0$ *si* $i > j$ *y* $\lambda_{ii} \neq 0$ $1 \leq i \leq r$. *Entonces* L *es un sistema libre.*

A partir de este resultado se pueden obtener bases de un subespacio vectorial del siguiente modo:

1. Obtener las coordenadas de un sistema generador de dicho subespacio respecto de una base del espacio vectorial.

2. Escribir de arriba a abajo las n-tuplas correspondientes a dichos vectores de forma que los elementos de la diagonal sean distintos de 0.

3. Realizar operaciones elementales en dicha conjunto de vectores hasta obtener un sistema equivalente pero con los elementos de la diagonal distintos de 0 y debajo de la diagonal nulos.

4. Eliminar los vectores nulos.

Dado que el conjunto de vectores obtenido es equivalente al inicial, éste también es un sistema generador del subespacio y aplicando la propiedad anterior, sería un sistema libre y por lo tanto, una base del subespacio.

A continuación presentamos el siguiente importante resultado:

Teorema 1 *Si* $L_1 = \{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_r}\} \subseteq L_2 = \{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_r}, \mathbf{v_{r+1}}, \ldots, \mathbf{v_s}\}$ *son subconjuntos de un espacio vectorial* V *tales que* L_1 *es un sistema libre y* L_2 *es un sistema generador de* V *entonces existe una base* B *de* V *tal que* $L_1 \subseteq B \subseteq L_2$.

A partir de este resultado se obtiene:

Proposición 17 *Si* $V \neq 0$ *es un espacio vectorial finitamente generado:*

i) Todo sistema generador de V *contiene una base de* V.

ii) V *tiene bases.*

iii) Todo sistema libre está contenido en una base de V.

Teorema 2 *Si* V *es un* K*-espacio vectorial finitamente generado, todas las bases de* V *tienen el mismo número de elementos.*

A partir del resultado anterior se obtiene la siguiente definición:

Definición 14 *La dimensión de un K-espacio vectorial $V \neq 0$, denotada por* **dim** V *es el número de elementos de una cualquiera de sus bases. Se define* **dim** $0 = 0$.

De la definición de dimensión y de las propiedades anteriores se obtiene:

Proposición 18 *Sea V un espacio vectorial de dimensión n. Entonces:*

i) *Todo conjunto finito de vectores con más de n elementos es ligado.*

ii) *Todo sistema generador de V tiene al menos n elementos.*

iii) *Si L es un subconjunto de n elementos de V entonces:*

   a) *L es una base de V si y sólo si L es un sistema libre.*

   b) *L es una base de V si y sólo si L es un sistema generador de V.*

iv) *Si $U \leq V$ entonces U es finitamente generado.*

v) *Si $U \leq V$, $U \neq V$ entonces* **dim** $U <$ **dim** V.

vi) *Si B es una base de V y L es un sistema libre entonces existe $\tilde{B} \subseteq B$ tal que $L \cup \tilde{B}$ es una base de V.*

vii) *Si $V = S \bigoplus T$, B_1 es base de S y B_2 es base de T entonces $B_1 \cup B_2$ es base de V.*

Definición 15 *Si V es un K-espacio vectorial y $L = \{v_1, \ldots, v_r\}$, se define el rango de L como* **rg** $L =$ **dim**$\langle v_1, \ldots, v_r \rangle$.

Proposición 19 *Si V es un espacio vectorial finitamente generado y $U, W \leq V$ entonces:*

$$\mathbf{dim}\ (U + W) = \mathbf{dim}\ U + \mathbf{dim}\ W - \mathbf{dim}\ (U \cap W).$$

Bibliografía

1. R. Barbolla, P. Sanz, *Álgebra Lineal y teoría de matrices.* Ed. Prentice Hall.

2. J. Burgos, *Curso de Álgebra y Geometría.* Ed. Alhambra Longman.

3. J. S. Canovas, J. A. Murillo, *Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería.* Ed. Diego Marín.

4. A. De la Villa, *Problemas de Álgebra Lineal con esquemas teóricos.* CLAGSA.

5. J. R. Torregrosa, C. Jordán, *Álgebra Lineal y sus aplicaciones.* Ed. McGraw-Hill.