

**Universidad Politécnica de Cartagena**  
**Departamento de Matemática Aplicada y Estadística**

**Límites y Continuidad de funciones de varias variables**

1. Calcula el interior, la clausura, la frontera y el derivado de los siguientes subconjuntos del  $\mathbb{R}^n$  correspondiente:

i)  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}$ .

ii)  $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$ .

iii)  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^2\}$ .

iv)  $D = \{(0, 0), (1, 0)\}$ .

v)  $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$ .

vi)  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 < 4\}$ .

vii)  $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y < 0\}$ .

viii)  $H = [2, 3[\times] - 1, 3[$ .

ix)  $I = ([2, 3] \times [0, 1]) \cup \{(0, 1)\}$ .

x)  $J = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ .

xi)  $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 \leq 4\}$ .

xii)  $L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 4, 0 \leq z < 3\} \cup \{(-3, 0, 0)\} \cup \{(2, 0, 0)\}$ .

xiii)  $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 4\} \cup \{(2, 0, 0)\} \cup \{(4, 0, 0)\}$ .

xiv)  $N = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 9\} \cup \{(4, 3, 1)\}$ .

2. Calcula el dominio máximo donde podrías definir las siguientes funciones:

i)  $f_1(x, y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$  ii)  $f_2(x, y) = \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2-4}}$  iii)  $f_3(x, y) = \log(x^2 + y^2 - 9)$

iv)  $f_4(x, y) = \frac{x+y}{xy^2}$  v)  $f_5(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$  vi)  $f_6(x, y) = \left(\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2-1}}, \frac{3}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\right)$ .

3. Analiza la existencia del límite en  $(0, 0)$  de las siguientes funciones:

i)  $f_1 : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_1(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ .

ii)  $f_2 : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_2(x, y) = \frac{x+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ .

- iii)  $f_3 : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_3(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$ .
- iv)  $f_4 : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_4(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$ .
- v)  $f_5 : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_5(x, y) = \frac{xy + y^2}{x^2 + y^2}$ .
- vi)  $f_6 : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_6(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ .
- vii)  $f_7 : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_7(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2 + x^4}$ .
- viii)  $f_8 : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \mid f_8(x, y) = \left(\frac{y^2}{x^2 + y^2}, x + y\right)$ .
- ix)  $f_9 : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \mid f_9(x, y) = \left(\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)\right)$ .
- x)  $f_{10} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_{10}(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2 + x^2 y^2}$ .

4. Analiza la continuidad de las siguientes funciones:

- i)  $f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_1(x, y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
- ii)  $f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_2(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
- iii)  $f_3 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_3(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
- iv)  $f_4 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_4(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
- v)  $f_5 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_5(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
- vi)  $f_6 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_6(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2(x - y)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
- vii)  $f_7 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_7(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, y) \end{cases}$