Sucesiones y Series

1. Demostrar que la sucesión
$$a_1 = 2, a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1} \text{ si } n > 1$$
es convergente y calcular su límite.
2. Calcula los siguientes límites:
i) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^3+2^3+...+n^3}{n^4}$
ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4^2+8^2+...+(4n)^2}{n^3}$
iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}}{k+1}$
iv) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{n-4}}{\sqrt{n-7}}\right)^{\sqrt{n}}$
v) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + ... + \frac{n}{n^2+n}\right)$
vi) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{\sqrt{n^4+1}} + \frac{n}{\sqrt{n^4+2}} + ... + \frac{n}{\sqrt{n^4+n}}\right)$
3. De las siguientes afirmaciones, demostrar las que son ciertas y dar un contraejemplo para las falsas:
i) Toda sucesión monótona es convergente.
ii) Toda sucesión convergente es monótona.
iii) Toda sucesión convergente es acotada.
iv) Toda sucesión acotada es convergente.
v) La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ es divergente.
4. Demostrar que las siguientes series son convergentes y calcula su suma:
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{2^n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4n+2}{3^n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$; $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2-3n+2}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+5n+6}$.
5. Analizar la convergencia de las siguientes series:
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{3n+1}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+2n+2}}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2+n}{1+n^2}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{(n!)^2}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!-n!}{4^n}$;
$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+4}}{\sqrt{n^4+5n+1}}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+4}}{\sqrt{n^5+5n+1}}$;
6. Demostrar que las series
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$
son convergentes. ¿Son absolutamente convergentes?