

Universidad Politécnica de Cartagena
Departamento de Matemática Aplicada y Estadística

Integración de funciones reales de variable real

1. Calcula las sumas inferiores y las sumas superiores de Riemann de $f(x)$ para las particiones \mathcal{P} y \mathcal{P}' en los siguientes casos:

i) $f(x) = x^2 - 2x + 1$ en $[-1, 3]$ para $\mathcal{P} = \{-1, 1, 3\}$ y $\mathcal{P}' = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$.

ii) $f(x) = \cos x$ en $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ para $\mathcal{P} = \{\frac{-\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}\}$ y $\mathcal{P}' = \{\frac{-\pi}{2}, \frac{-\pi}{6}, 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\}$.

iii) $f(x) = 2^x$ en $[-2, 2]$ siendo $\mathcal{P} = \{-2, -1, 0, 2\}$ y $\mathcal{P}' = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

2. Calcula las siguientes integrales:

i) $\int \frac{1}{\sqrt{-x^2-2x+2}} dx$ ii) $\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+2x+1}} dx$ iii) $\int \frac{1}{\sqrt{-4x^2+4x+1}} dx$ iv) $\int \frac{1}{x^2+2x+4} dx$ v) $\int \frac{1}{4x^2+4x+3} dx$
vi) $\int \frac{1}{4x^2-4x+4} dx$ vii) $\int \frac{x+1}{x^2+x-2} dx$ viii) $\int \frac{x-3}{x^2+2x+2} dx$ ix) $\int \frac{x+1}{x^2-3x+5} dx$ x) $\int \frac{x}{\sqrt{-x^2-2x+2}} dx$.

3. Calcula las siguientes integrales:

i) $\int \frac{33x^2-3x-6}{(9x^2-1)(2x+1)} dx$ ii) $\int \frac{x^5-3x^4-2x^3-7x^2+x-4}{x^3+3x^2-x-3} dx$ iii) $\int \frac{x^4+x^3-12x^2-25x-5}{x^3-7x-6} dx$
iv) $\int \frac{3x^3+2x^2+x-7}{x^4+x^3-3x^2-5x-2} dx$ v) $\int \frac{-x^3+4x^2-8x+7}{x^4-6x^3+13x^2-12x+4} dx$ vi) $\int \frac{1}{4x^2-2x+1} dx$ vii) $\int \frac{1}{4x^2-4x+3} dx$
viii) $\int \frac{1}{x^2+x+1} dx$ ix) $\int \frac{x^2-9x-9}{x^3+5x^2+4x-10} dx$ x) $\int \frac{x^5-x^4+x^3-3x^2+2x+2}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} dx$ xi) $\int \frac{5x+2}{4x^2-4x+3} dx$
xii) $\int \frac{18x+7}{9x^2+6x+5} dx$ xiii) $\int \frac{1}{9x^2+6x+3} dx$ xiv) $\int \frac{-x^2+3x+4}{x^3+4x^2+4x} dx$ xv) $\int \frac{4x^4+14x^2+3x-1}{4x^3-2x-2} dx$
xvi) $\int \frac{x^4}{x^4-1} dx$ xvii) $\int \frac{x^5+x^3-x^2+x-1}{x^4} dx$ xviii) $\int \frac{x^3+10x^2+27x+16}{x^4+5x^3+6x^2-4x-8} dx$.

4. Calcula las siguientes integrales:

i) $\int \frac{4}{(x-1)^2(x^2+1)^2} dx$ ii) $\int \frac{1}{((2x+1)^2+1)^2} dx$ iii) $\int \frac{9}{(x^2+x+1)^2(x-1)^2} dx$ iv) $\int \frac{1}{(x^2+1)^3} dx$
v) $\int \frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)^2} dx$.

5. Calcula las siguientes integrales:

i) $\int \frac{\sqrt{x^3}}{x-1} dx$ ii) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[3]{x-1}} dx$ iii) $\int \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^3-1}} dx$ iv) $\int \frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{x+1}} dx$ v) $\int \frac{x+\sqrt{(x+1)^3}}{(x-1)\sqrt{x+1}} dx$ vi) $\int \frac{\sqrt[3]{x-1}-1}{\sqrt[3]{(x-1)^2+1}} dx$
vii) $\int x\sqrt{\frac{x+2}{x-2}} dx$ viii) $\int \frac{\sqrt{(x-2)^3}-\sqrt{(x-2)^5}}{\sqrt{x-2+3}} dx$ ix) $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \frac{1}{x} dx$

6. Calcula las siguientes integrales:

$$\begin{aligned} \text{i)} & \int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+x-3}} dx \quad \text{ii)} \int \frac{1}{(x-\frac{1}{2})\sqrt{4x^2-1}} dx \quad \text{iii)} \int \frac{1}{\sqrt{4x^2+x+1}} dx \quad \text{iv)} \int \frac{1}{x\sqrt{-x^2+2x+1}} dx \\ \text{v)} & \int \frac{1}{x\sqrt{-2x^2-x+1}} dx \quad \text{vi)} \int \frac{1}{(x-1)\sqrt{-x^2+x+4}} dx \quad \text{vii)} \int \frac{1}{\sqrt{x^2+3x+2}} dx \quad \text{viii)} \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}} dx \\ \text{ix)} & \int \frac{1}{\sqrt{x^2+x-2}} dx. \end{aligned}$$

7. Calcula las siguientes integrales:

$$\begin{aligned} \text{i)} & \int \frac{-3x-1}{\sqrt{-x^2-2x+1}} dx \quad \text{ii)} \int \frac{-12x^3+2x^2+8x+7}{\sqrt{-4x^2+4x+3}} dx \quad \text{iii)} \int \frac{-2x^2-5x}{\sqrt{-x^2-2x+1}} dx \quad \text{iv)} \int \frac{2x^2+2x-6}{\sqrt{x^2+2x-3}} dx \\ \text{v)} & \int \frac{4x^2+3x-1}{\sqrt{x^2+x}} dx \quad \text{vi)} \int \frac{4x^2-x-7}{\sqrt{x^2-x-4}} dx. \end{aligned}$$

8. Calcula las siguientes integrales:

$$\begin{aligned} \text{i)} & \int \frac{1}{x^3\sqrt[3]{x^3+1}} dx \quad \text{ii)} \int \frac{x^2}{\sqrt[3]{(2+x)^2}} dx \quad \text{iii)} \int \sqrt{\frac{1+2x^{-1}}{x}} dx \quad \text{iv)} \int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[6]{2+x^{-2}}} dx \quad \text{v)} \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2+\sqrt{x}}} dx \\ \text{vi)} & \int \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}\sqrt{1+x^{-\frac{1}{3}}}} dx. \end{aligned}$$

9. Calcula las siguientes integrales:

$$\begin{aligned} \text{i)} & \int \frac{e^x-1}{e^x+2} dx \quad \text{ii)} \int \frac{5^x+2}{5^x-1} dx \quad \text{iii)} \int \frac{1+\arcsin^2 x}{(1+\arcsin x)\sqrt{1-x^2}} dx \quad \text{iv)} \int \frac{\arctan x+3}{(2-\arctan x)(1+x^2)} dx \quad \text{v)} \int \frac{1}{e^{2x}-e^x} dx \\ \text{vi)} & \int \frac{1}{\sin^2 x \cos x} dx \quad \text{vii)} \int \frac{\tan^3 x}{1+\tan^2 x} dx \quad \text{viii)} \int \cos^5 x dx \quad \text{ix)} \int \sin^4 x dx \quad \text{x)} \int \frac{1}{5-3\cos x+4\sin x} dx \\ \text{xi)} & \int \frac{1-\sin x}{1+\sin x} dx \quad \text{xii)} \int \frac{1}{10+6\sin x+8\cos x} dx \quad \text{xiii)} \int \tan^3 x dx \quad \text{xiv)} \int \frac{\tan x}{1+\sin x} dx \quad \text{xv)} \int \sin^4 x \cos^2 x dx \\ \text{xvi)} & \int \sin^2 x \cos^2 x dx. \end{aligned}$$

10. Calcula las siguientes integrales:

$$\begin{aligned} \text{i)} & \int \sqrt{-4x^2-8x-3} dx \quad \text{ii)} \int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}} dx \quad \text{iii)} \int \sqrt{4x^2+8x+8} dx \quad \text{iv)} \int \sqrt{-x^2+4x} dx \\ \text{v)} & \int \frac{x^2}{\sqrt{4x-x^2}} dx \quad \text{vi)} \int \sqrt{x^2-2x-3} dx \quad \text{vii)} \int \sqrt{-x^2+2x} dx \quad \text{viii)} \int \frac{x^2}{\sqrt{3x-x^2}} dx \end{aligned}$$

11. Calcula las siguientes integrales definidas:

$$\begin{aligned} \text{i)} & \int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx \quad \text{ii)} \int_1^{3\sqrt{2}/2+1} \sqrt{-x^2+2x+8} dx \quad \text{iii)} \int_{-1}^1 \sqrt{x^2+2x+5} dx \\ \text{iv)} & \int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx \end{aligned}$$

12. Calcula el área limitada por la función $f(x) = x^2 - 3x + 2$, las rectas $x = 0$ y $x = 4$ y el eje OX .

13. Calcula el área limitada por la función $f(x) = x^2 - 4$, las rectas $x = 0$ y $x = 3$ y el eje OX .

- 14.** Calcula el área limitada por la función $f(x) = x^3 - 1$, las rectas $x = 0$ y $x = 2$ y el eje OX .
- 15.** Calcula el área limitada por la función $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$, las rectas $x = 0$ y $x = 3$ y el eje OX .
- 16.** Calcula el área limitada por la función $f(x) = \sin x$, las rectas $x = -\frac{\pi}{4}$ y $x = \frac{\pi}{4}$ y el eje OX .
- 17.** Calcula el área limitada por la función $f(x) = \cos x$, las rectas $x = -\pi$ y $x = \pi$ y el eje OX .
- 18.** Calcula el área limitada por las funciones $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x$.
- 19.** Calcula el área limitada por las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = 5x - 6$.
- 20.** Demostrar que el área de la circunferencia de radio r

$$x^2 + y^2 = r^2$$

es πr^2 .

- 21.** Calcula el área de la elipse de semiejes de longitud a y b

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

- 22.** Calcula el área de la región limitada por las circunferencias $x^2 + y^2 = 4$ y $(x-1)^2 + y^2 = 4$.

- 23.** Calcula la longitud de la circunferencia de radio r

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

- 24.** Calcula la superficie total y el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar la región del plano limitada por la gráfica de $y = x^3$, las rectas $x = 0$ y $x = 1$ alrededor del eje OX .

- 25.** Calcula la superficie total y el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar la región del plano limitada por la gráfica de $y = x^2$, las rectas $x = 0$ e $x = 1$ alrededor del eje OX .

26. Calcula la superficie total y el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar la región del plano limitada por la gráfica de $y = \sin x$, las rectas $y = 0$ e $y = 1$ alrededor del eje OY .

27. Calcula el volumen de la esfera de radio r

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

28. Calcula el volumen del cilindro de radio r y altura h .

29. Calcula el volumen del cono de radio r y altura h .