Universidad Politécnica de Cartagena

Departamento de Matemática Aplicada y Estadística

Derivabilidad de funciones reales de variable real

1. A partir de la definición de derivada, calcula:

i) $f'(-1)$ siendo $f(x) = x^2 - 5x + 6$. **ii)** $g'(2)$ siendo $g(x) = x^2 + x + 1$.

iii) $j'(3)$ siendo $j(x) = \frac{x+2}{x+1}$ **iv)** $l'(-1)$ siendo $l(x) = \frac{1}{x}$.

2. Cálcula los puntos de la gráfica de la función $f(x)$ cuya recta tangente en dichos puntos forme un ángulo θ con la parte positiva del eje OX en los siguientes casos:

i) $f(x) = x^2 - 4$, $\theta = \frac{\pi}{4}$ **ii)** $y = \sin x$, recta tangente horizontal. **iii)** $y = e^x$, $\theta = \frac{\pi}{2}$.

3. Analiza la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones:

i) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 2x & \text{si } x > 0 \end{cases}$ **ii)** $g(x) = \begin{cases} 2x+5 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$ **iii)** $j(x) = \begin{cases} x^2 - 5 & \text{si } x < 2 \\ 3x - 7 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

iv) $l(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ 2x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ **v)** $m(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ **vi)** $n(x) = |x^2 - 4|$

vii) $r(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ **viii)** $s(x) = |x + 3|$.

4. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

i) $y = \frac{x-3}{x+1}$ **ii)** $y = \frac{(x-1)^2}{\log x^2}$ **iii)** $y = \sin^3 x^2$ **iv)** $y = \frac{\arctan^3 x - \sin x^2}{x}$ **v)** $y = \arcsin^2(\frac{x-1}{x+2})$

vi) $y = \cos(\cos(\cos x))$ **vii)** $y = \sec^2 x - \operatorname{cosec} x^2$ **viii)** $y = 5^{2\sin x} - x^4$ **ix)** $y = (x)^{x^2}$

x) $y = \sin x^x$ **xi)** $y = (\cos x)^x$ **xii)** $y = x^{\arctan^2 x}$.

5. Representa gráficamente las siguientes funciones:

i) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ **ii)** $y = -x^4 + x^2$ **iii)** $y = \frac{x^2-1}{x}$ **iv)** $y = \frac{1}{x^2+1}$ **v)** $y = \frac{x^2}{x^2+x-4}$

vi) $\frac{x}{1+|x|}$ **vii)** $y = \log(x^2 - 9)$ **viii** $y = xe^{-x}$ **ix)** $y = \frac{\sin x}{x}$ **x)** $y = \sin x \cos x$.

6. Calcula las rectas tangentes a la gráfica de $f(x)$ en sus puntos de inflexión en los siguientes casos:

i) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$ **ii)** f(x)=xe ^{x} **iii)** $f(x) = \frac{x^2}{2} - \log x$.

7. Demuestra las siguientes desigualdades:

i) $\tan x \geq x$ si $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ **ii)** $e^x > \frac{1}{1+x}$ si $x > 0$ **iii)** $\log x < x$ si $x > 1$.

8. Calcula las derivadas n-ésimas de las siguientes funciones:

i) $y = \log kx,\ k > 0$ **ii)** $y = \cos kx,\ k > 0$ **iii)** $y = \sqrt{x}$ **iv)** $y = xe^x$.

9. Calcula entre todos los números positivos cuyo producto es 16, aquellos que tienen suma mínima.

10. Calcula el punto de la parábola $y = x^2$ de menor distancia al punto $P = (1, 2)$,

11. Calcula las dimensiones del triángulo isósceles de área máxima entre los que tienen de perímetro 30 cm.

12. Calcula la distancia mínima del origen a la curva $xy = 1$.

13. Calcula las dimensiones del rectángulo de área máxima que tiene sus lados paralelos a los ejes de coordenadas, inscrito en la elipse $4x^2 + y^2 = 1$.

14. Calcula las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en una circumferencia de radio 8 cm.

15. Para cada una de las siguientes funciones, analiza si se verifican o no las hipótesis del Teorema de Rolle. Si es posible, calcula un valor donde se obtenga la tesis.

i) $y = x^2 - 4x + 2$ en $[1, 3]$. **ii)** $y = x^3 - 1$ en $[0, 1]$. **iii)** $y = |x - 1|$ en $[0, 2]$.

16. Para cada una de las siguientes funciones, analiza si se verifican o no las hipótesis del Teorema del valor medio de Lagrange. Si es posible, calcula un valor donde se obtenga la tesis.

i) $y = |x^2 - 9|$ en $[1, 4]$. **ii)** $y = x^2 + 2$ en $[0, 2]$. **iii)** $y = x^2 + x + 1$ en $[-1, 1]$.

iv) $y = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x^2 + x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ en $[-1, 2]$.

17. Calcula los valores de a y b para los cuales las siguientes funciones satisfacen las hipótesis del Teorema del valor medio de Lagrange en los intervalos indicados. Para dichos valores, calcula un valor donde se obtenga la tesis.

i) $y = \begin{cases} ax^2 + bx + 1 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ ax + b & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$ en $[-1, 1]$. **ii)** $y = \begin{cases} 2x - a & \text{si} \quad x \leq 1 \\ ax + b & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$ en $[-1, 2]$.

iii) $y = \begin{cases} ax^2 + 1 & \text{si} \quad x \leq -1 \\ 2x + b & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$ en $[-4, 0]$.

18. Dada la función $f(x) = x^2 + 1$, ¿Qué teorema afirma que existe $x_0 \in]-2, 1[$ tal que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $(x_0, f(x_0))$ es paralela a la recta que pasa por los puntos $(-2, 5)$ y $(1, 2)$. Calcula x_0.

19. Analiza si $f(x)$ y $g(x)$ verifican las hipótesis del Teorema del valor medio de Cauchy en los intervalos indicados. Si es posible, calcula un valor donde se obtenga la tesis.
i) $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = x + 2$ en $[0, 3]$. **ii)** $f(x) = |x|$ y $g(x) = x^2 - 3x + 1$ en $[1, 2]$.

iii) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si} \quad x \leq 2 \\ x - 2 & \text{si} \quad x \leq 2 \end{cases}$ y $g(x) = x^2 + 2x + 1$ en $[0, 3]$.

20. Calcula los siguientes límites usando el Teorema de L'Hôpital:
i) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1}$ **ii)** $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos ax}{1-\cos bx}$ siendo $a, b \in \mathbb{R}$. **iii)** $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{1-\tan x}{x-\frac{\pi}{4}}$ **iv)** $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$
v) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\text{cosec} x}{\log x}$ **vi)** $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\sec x}{\log(x-\frac{\pi}{2})}$ **vii)** $\lim_{x\to\infty} x e^{-x}$ **viii)** $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x^3}$
ix) $\lim_{x\to 0^+} \tan x \log x$ **x)** $\lim_{x\to 0} (\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x^3})$ **xi)** $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$ **xii)** $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3}$
xiii) $\lim \frac{e^x+\cos x}{e^x+\sin x}$ **xiv)** $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (1 + 2\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}$ **xv)** $\lim_{x\to 1} \frac{\cos(x-1)-1}{(\log x)^2}$ **xvi)** $\lim_{x\to 0^+} (\text{cotan} x)^x$
xvii) $\lim_{x\to 0} (\frac{1+\tan x}{1+\sin x})^{\text{cosec} x}$ **xviii)** $\lim_{x\to 0} (\text{cotan} x - \frac{1}{x})$ **xix)** $\lim_{x\to 1} \frac{x}{\log x} - \frac{1}{\sin(x-1)}$
xx) $\lim_{x\to\infty} (\cos\frac{1}{x})^x$.

21. Calcula el polinomio de Taylor de grado n de $f(x)$ en x_0 en los siguientes casos:
i) $y = \cos x$, $x_0 = 1$, $n = 5$.
ii) $y = x\sin x$, $x_0 = 0$, $n = 6$.
iii) $y = \tan 2x$, $x_0 = 0$, $n = 4$.
iv) $y = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$, $n = 4$.

v) $y = \log x$, $x = 1$, $n = 4$.

vi) $y = \cos x$, $x = \frac{\pi}{2}$, $n = 6$.

22. Dada la función $f(x) = \sqrt{1+x}$ calcula:

i) Su polinomio de Mc. Laurin de grado 3.

ii) Aproxima $\sqrt{1.1}$ utilizando el polinomio obtenido en el apartado anterior y obtén la menor posible de las cotas superiores del error cometido.

23. Dada la función $f(x) = \log x$ calcula:

i) Su polinomio de Taylor de grado 3 en $x = 1$.

ii) Aproxima $\log 0.9$ utilizando el polinomio obtenido en el apartado anterior y obtén la menor posible de las cotas superiores del error cometido.

24. Dada la función $f(x) = \sqrt{x}$ calcula:

i) Su polinomio de Taylor de grado 4 en $x = 9$.

ii) Aproxima $\sqrt{10}$ utilizando el polinomio obtenido en el apartado anterior y obtén la menor posible de las cotas superiores del error cometido.

25. Obtén aproximaciones decimales con las cifras decimales exactas indicadas usando el polinomio de Taylor adecuado:

i) $\frac{1}{\sqrt{1.1}}$ con 3 decimales exactos.

ii) $\cos 0.1$ con 3 cifras decimales exactas.

iii) $\mathrm{e}^{0.1}$ con 4 cifras decimales exactas.

iv) $\sqrt{84}$ con 2 cifras decimales exactas.

v) $\mathrm{e}^{0.1}\sin 0.1$ con 3 cifras decimales exactas.

26. Usando el polinomio de Taylor de la función $f(x) = 6\arcsin x$ en $x = 0$, calcula una aproximación de π con 4 cifras decimales. (Ayuda: $\pi = f(\frac{1}{2})$)

27. Demostrar que $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.