Universidad Politécnica de Cartagena

Departamento de Matemática Aplicada y Estadística

Funciones reales de variable real

1. Calcula el dominio máximo de las siguientes funciones. Determina en cada caso los puntos de acumulación de dicho conjunto.

i) $y = \frac{x}{x^2+1}$ **ii)** $y = \frac{x+3}{x^2-4}$ **iii)** $y = \sqrt{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}$ **iv)** $y = \sqrt{x^2 + 1}$ **v)** $y = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$
vi) $y = \log x^2$ **vii)** $y = \sqrt[3]{x^3 - 1}$ **viii)** $y = \frac{1}{\sin x}$.

2. Demostrar por la definición de límite que:

i) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^2-1} = 0$ **ii)** $\lim_{x\to -2} \frac{x^2+3x+2}{x^2+5x+6} = -1$ **iii)** $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-x^2-x+1}{x^3-3x+2} = \frac{2}{3}$.

3. Calcula los siguientes límites:

i) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-4}{x+1}$ **ii)** $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2-6x+9}$ **iii)** $\lim_{x\to -1} \frac{x^2+2x+1}{2x^2+6x+4}$ **iv)** $\lim_{x\to 1} \sqrt{\frac{x^3-3x-2}{x^3-3x^2+3x-1}}$
v) $\sqrt[3]{\frac{x^2-1}{x+3}}$ **vi)** $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^3-1}{x^3-2x+1}$ **vii)** $\lim_{x\to 1} \left(\frac{x+1}{3x}\right)^{\frac{1}{x-1}}$ **viii)** $\lim_{x\to -2} \left(\frac{x+5}{x+3}\right)^{\frac{2x}{x+2}}$
ix) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{2x}$ **x)** $\lim_{x\to 2} \left(\frac{2x}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$ **xi)** $\lim_{x\to -1} \left(\frac{2x+3}{x}\right)^{\frac{2x}{x+1}}$ **xii)** $\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{5+x}-2}{x+1}$
xiii) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{1-x}$ **xiv)** $\lim_{x\to 3} \frac{2x-6}{\sqrt{x+1}-2}$.

4. Analiza la continuidad de las siguientes funciones:

i) $y = x^2 - 1$ **ii)** $y = \sqrt{x^2 - 4}$ **iii)** $y = |x^2 - 6x + 8|$ **iv)** $y = |\frac{x}{1+x}|$

v) $y = \frac{1}{x^2-4}$ **vi)** $y = \frac{1}{x^2+x+1}$ **vii)** $y = |\frac{1}{x}|$ **viii)** $y = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < -2 \\ x + 1 & \text{si } -2 \leq x < 2 \\ 2x - 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

ix) $y = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ \dfrac{1}{x^2 - 9} & \text{si } x > 3 \end{cases}$ **x)** $y = \begin{cases} -2x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 2x + 3 & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ \dfrac{1}{x - 2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$.

5. Determina $a, b \in \mathbb{R}$ para los cuales las siguientes funciones son continuas:

i) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} ax - 5 & \text{si} \;\; x \leq -1 \\ -ax + b & \text{si} \;\; -1 < x < 2 \\ -2ax + 3b & \text{si} \;\; x \geq 2 \end{cases}$

ii) $g : [-2, 5[\longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \begin{cases} 3x + a & \text{si} \;\; -2 \leq x < -1 \\ bx + a & \text{si} \;\; -1 \leq x < 3 \\ 2x - b & \text{si} \;\; 3 \leq x < 5 \end{cases}$.

6. Demostrar, aplicando el Teorema de Bolzano que las siguientes ecuaciones tienen solución en los intervalos indicados:

i) $x^3 + 2x - 1 = 0$ en $]0, 2[$. **ii)** $1 - x = \tan x$ en $]0, \pi/4[$. **iii)** $x = \sin x$ en $] - \pi/6, \pi/6[$.
iv) $x^n - 2 = 0$ si $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ en $]0, 2[$.

7. Indica en cada apartado que hipótesis del Teorema de Bolzano falla y analiza si se verifica o no la Tesis de dicho Teorema:

i) $f : [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si} \;\; 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 2 & \text{si} \;\; 1 < x \leq 2 \end{cases}$.

ii) $g : [1, 3] \longrightarrow \mathbb{R} \mid g(x) = x^2 + 1$.

8. Demuestra que todo polinomio de grado impar tiene por lo menos un raíz real.

9. Justifica que un hilo de alambre con forma circular calentado tiene dos puntos diametralmente opuestos con la misma temperatura.