Universidad Politécnica de Cartagena

Departamento de Matemática Aplicada y Estadística

Problemas de Álgebra

Diagonalización de matrices

1. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ vectores propios de una matriz $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ asociados a valores propios distintos $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Razonar si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:

i) Cada vector propio de A tiene asociado un único valor propio.

ii) Para todo $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, αx es un vector propio asociado al mismo valor propio λ.

iii) x e y son vectores linealmente independientes.

iv) Una matriz tiene el valor propio 0 si y sólo si su determinante es 0.

v) $x + y$ es un vector propio de A.

vi) λ^n es un valor propio de A^n y si A es regular, $1/\lambda$ es un valor propio de A^{-1}.

vii) Si A, C son semejantes entonces tienen el mismo determinante, el mismo polinomio característico y los mismos valores propios.

viii) Dos matrices diagonalizables son semejantes si y sólo si tienen los mismos valores propios con las mismas multiplicidades.

2. Estudiar los valores propios de las siguientes matrices, decir si son diagonalizables y en caso afirmativo obtener la matriz de paso y la potencia n-ésima siendo $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} -26 & -15 \\ 50 & 29 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ -6 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Estudiar según los valores de los parámetros, si son diagonalizables las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & \alpha \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Sea f un endomorfismo diagonalizable de $\mathbb{R}^3$ con valores propios 1 y -1 y subespacios propios $V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+z = 0\}$ y $V_{-1} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 0, x+y = 0\}$. Calcula la expresión analítica de f.

5. Sea f un endomorfismo diagonalizable de $\mathbb{R}^3$ con valores propios 0, -1 y 2 y subespacios propios $V_0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0, x - z = 0\}$, $V_{-1} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0, y+z = 0\}$ y $V_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y = 0, 2x+y = 0\}$. Calcula la expresión analítica de f.

Problemas de exámenes

6. Sea $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$f(e_1) = 4e_1 - 2e_2, f(e_2) = 2e_1 - e_2, f(e_3) = e_1 - 2e_2 + 3e_3.$$

a) Dar la matriz de f en la base B. Comprobar que esta matriz es diagonalizable.

b) Obtener la matriz diagonal semejante a la matriz anterior y la correspondiente base $B' = \{u_1, u_2, u_3\}$ de vectores propios. Obtener también una matriz de paso.

c) Obtener razonadamente la matriz de cambio de base de B' a B y dar las coordenadas del vector $v = u_1 + u_2 + u_3$ en ambas bases.

7. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

la matriz asociada a un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ f en la base canónica.

a) Discutir según los valores de a y b si existen $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tales que $f(x,y,z) = (1, b, 1)$.

b) Para $a = 0$, demostrar que la matriz A es diagonalizable, obtener la matriz diagonal semejante de A, la base correspondiente y la matriz de paso asociada P, dar otra matriz diagonal semejante a A y la nueva matriz de cambio de base P.

8. Sea $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ tal que $f(u_1) = 4u_1$, $f(u_2) = au_1 + u_2 + 3u_3$, $f(u_3) = u_1 + 2u_2 + 2u_3$.

i) Calcula la matriz A del endomorfismo en dicha base, obtén sus valores propios y los valores de a para los cuales f es diagonalizable.

ii) Obtén una base de $\mathbb{R}^3$ para la cual la matriz de f es diagonal y da dicha matriz diagonal D. Da otra matriz diagonal D' semejante a A y una matriz de paso asociada a ésta.